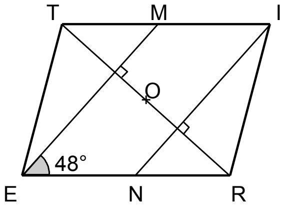
PARALLÉLOGRAMMES : EXERCICES RÉDIGÉS 8.1

ÉNONCÉ

Dans la figure ci-dessous, *TIRE* est un parallélogramme dont le centre est *O*. *M* et *N* appartiennent respectivement à [*TI*] et [*ER*].
1) Montrer que (*ME*) et (*NI*) sont parallèles.
2) Déterminer la nature de *MINE*.
3) Que peut-on dire de *O* par rapport au segment [*MN*] ?
4) Déterminer $\widehat{EMI}$
(Remarque : Il n'est pas demandé de reproduire la figure)



RÉDACTION

Hypothèses :
TIRE est un parallélogramme de centre *O*
$M \in [TI]$ et $N \in [ER]$
$(ME) \perp (TR)$ et $(NI) \perp (TR)$
$\widehat{MEN} = 48°$

1) Montrer que : (*ME*) // (*NI*).
Par hypothèses, $(ME) \perp (TR)$ et $(NI) \perp (TR)$.
Or si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles
donc $\boxed{(ME) // (NI)}$

2) Nature de *MINE*.
Par hypothèses, *TIRE* est un parallélogramme.
Or dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles
donc (*TI*) // (*ER*)
Or par hypothèses : $M \in [TI]$ et $N \in [ER]$ donc (*MI*) // (*EN*)
De plus d'après 1), (*ME*) // (*NI*).
Bilan, dans le quadrilatère *MINE*, on a :
(*MI*) // (*EN*) et (*ME*) // (*NI*).
Or un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles est un parallélogramme
donc $\boxed{MINE \text{ est un parallélogramme}}$

3) Position de *O* sur [*MN*]
D'après 2), *MINE* est un parallélogramme.
Or dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu
donc <u>[*EI*] et [*MN*] ont le même milieu</u>.
De plus, par hypothèses, *O* est le centre du parallélogramme *TIRE*
donc <u>*O* est le milieu de [*EI*]</u>
donc $\boxed{O \text{ est aussi le milieu de } [MN]}$

4) Déterminer $\widehat{EMI}$
D'après 2), *MINE* est un parallélogramme.
Or dans un parallélogramme, deux angles consécutifs sont supplémentaires
donc $\widehat{EMI} + \widehat{MEN} = 180$
Or par hypothèses, $\widehat{MEN} = 48°$
donc $\widehat{EMI} + 48 = 180$
donc $\widehat{EMI} = 180 - 48$
donc $\boxed{\widehat{EMI} = 132°}$

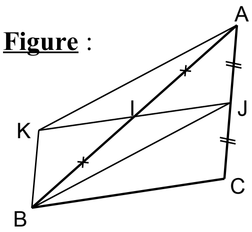
ÉNONCÉ

Soit un triangle *ABC* ainsi que *I* et *J* les milieux respectifs de [*AB*] et [*AC*]. Le but de cet exercice est de montrer que (*IJ*) est toujours parallèle à (*BC*).
1) Appelons *K* le symétrique de *J* par rapport à *I* :
Montrer que *AJBK* est un parallélogramme.
2) Montrer que : $AJ = KB$ puis $KB = JC$.
3) Montrer que *KJCB* est un parallélogramme.
4) En déduire que (*IJ*) est parallèle à (*BC*).
(Remarque : Vous reviendrez l'an prochain sur le résultat démontré en 4) sous le nom de « propriété de la droite des milieux ».)

RÉDACTION

Hypothèses :
ABC est un triangle
I est le milieu de [*AB*]
J est le milieu de [*AC*]
K est le symétrique de *J* par rapport à *I*

Figure :



1) Montrer que *AJBK* est un parallélogramme
Considérons le quadrilatère *AJBK*.
Par hypothèses, <u>*I* est le milieu de [*AB*]</u> et
K est le symétrique de J par rapport à I
donc <u>*I* est le milieu de [*KJ*].</u>
Or un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme
donc $\boxed{AJBK \text{ est un parallélogramme}}$

2) Montrer que : *AJ* = *KB*
D'après 1), *AJBK* est un parallélogramme.
Or dans un parallélogramme, les côtés opposés sont de même longueur
donc $\boxed{AJ = KB}$

Montrer que : *KB* = *JC*
Par hypothèses, *J* est le milieu de [*AC*] donc $AJ = JC$.
D'après ce qui précède, $AJ = KB$.
Donc $\boxed{KB = JC}$

3) Montrer que *KJCB* est un parallélogramme
D'après 1), *AJBK* est un parallélogramme.
Or dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles
donc (*KB*) // (*AJ*).
De plus, par hypothèses, *J* est le milieu de [*AC*]
donc *C* appartient à (*AJ*)
donc (*KB*) // (*JC*).
De plus, d'après 2) : $KB = JC$.
Bilan, dans le quadrilatère *KJCB*, on a : (*KB*) // (*JC*) et $KB = JC$.
Or un quadrilatère dont deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur est un parallélogramme
donc $\boxed{KJCB \text{ est un parallélogramme}}$

4) Montrer que : (IJ) // (BC)
D'après 3), KJCB est un parallélogramme.
Or dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles
donc (*KJ*) // (*BC*).
Or par hypothèses, *K* est le symétrique de *J* par rapport à *I*
donc I appartient à (KJ)
donc $\boxed{(IJ) // (BC)}$