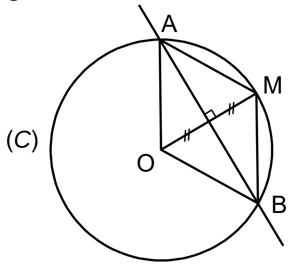
PARALLÉLOGRAMMES PARTICULIERS : EXERCICES RÉDIGÉS 12.2

ÉNONCÉ

Soit un cercle (C) de centre O. M étant un point de (C), on construit la médiatrice de $[OM]$ qui coupe (C) en A et en B.
1) Montrer que le quadrilatère $OAMB$ est un losange.
2) Déterminer la nature du triangle OAM.
3) Déterminer l'angle $\widehat{AOB}$.



RÉDACTION

<u>**Hypothèses**</u> :
(C) est un cercle de centre O
$M \in (C)$, $A \in (C)$, $B \in (C)$
A appartient à la médiatrice de $[OM]$
B appartient à la médiatrice de $[OM]$

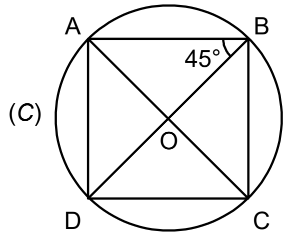
1) <u>Montrer que *OAMB* est un losange.</u>
Par hypothèses, A appartient à la médiatrice de $[OM]$.
Or tout point appartenant à la médiatrice d'un segment, est équidistant des extrémités de ce segment
donc $AO = AM$.
De même, par hypothèses, B appartient à la médiatrice de $[OM]$.
donc $BO = BM$.
Par hypothèses : $A \in (C)$ et $B \in (C)$ donc $AO = BO$.
Bilan, dans le quadrilatère $OAMB$, on a :
$AM = AO = BO = BM$.
Or un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur est un losange
donc $\boxed{OAMB \text{ est un losange}}$.

2) <u>Nature de *OAM*.</u>
D'après 1), $AO = AM$.
De plus, par hypothèses, $A \in (C)$ et $M \in (C)$
donc $AO = MO$.
Bilan, dans le triangle OAM, on a : $AM = AO = MO$
donc $\boxed{\text{le triangle } OAM \text{ est équilatéral}}$.

3) <u>Angle $\widehat{AOB}$</u>
D'après 2), le triangle OAM est équilatéral donc
$\widehat{OAM} = 60°$
D'après 1), $OAMB$ est un losange
Or dans un losange, deux angles consécutifs sont supplémentaires
donc $\widehat{OAM} + \widehat{AOB} = 180$
donc $\widehat{AOB} = 180 - \widehat{OAM}$
donc $\widehat{AOB} = 180 - 60$
donc $\widehat{AOB} = 120°$

ÉNONCÉ

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O.
$[AC]$ et $[BD]$ sont des diamètres de c tels que : $\widehat{ABD} = 45°$
1) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.
2) Montrer que le triangle ABD est isocèle.
3) En déduire que $ABCD$ est un carré.



RÉDACTION

<u>**Hypothèses**</u> :
(C) est un cercle de centre O
$[AC]$ et $[BD]$ sont des diamètres de (C)
$\widehat{ABD} = 45°$

1) <u>Montrer que *ABCD* est un rectangle</u>
Par hypothèses,
$[AC]$ est un diamètre du cercle (C) de centre O donc O est le milieu de $[AC]$
$[BD]$ est un diamètre du cercle (C) de centre O donc O est le milieu de $[BD]$.
Donc, dans le quadrilatère $ABCD$, O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$.
Or un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme
donc $ABCD$ est un parallélogramme.
De plus, par hypothèses, $[AC]$ et $[BD]$ sont des diamètres de (C) donc $AC = BD$.
Or un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle
donc $\boxed{ABCD \text{ est un rectangle}}$.

2) <u>Montrer que *ABD* est isocèle</u>
D'après 1), $ABCD$ est un rectangle donc le triangle ABD est rectangle en A.
Or dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires
donc $\widehat{BDA} + \widehat{ABD} = 90$
donc $\widehat{BDA} + 45 = 90$
donc $\widehat{BDA} = 45°$
donc $\widehat{BDA} = \widehat{ABD}$.
Or si un triangle a deux angles de même mesure, alors il est isocèle
donc $\boxed{ABD \text{ est isocèle en } A}$

3) <u>Montrer que *ABCD* est un carré</u>
D'après 1), <u>$ABCD$ est un rectangle</u>.
D'après 2), ABD est isocèle en A donc <u>$AB = AD$</u>.
Or un rectangle qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un carré
donc $\boxed{ABCD \text{ est un carré}}$