TRIANGLES : DÉMONSTRATION DE CERTAINES PROPRIÉTÉS DU COURS 4.2

I) Somme des mesures des angles dans un triangle quelconque :

Soit ABC un triangle quelconque. On appelle I le milieu de $[AB]$ et C' le symétrique de C par rapport à I, puis J le milieu de $[AC]$ et B' le symétrique de B par rapport à J.

1) a) Démontrer que $\widehat{BAC'}$ et $\widehat{ABC}$ ont la même mesure.
   b) En reprenant exactement la même démonstration avec la symétrie de centre J, quel résultat analogue obtiendrait-on ? *(on ne rédigera pas cette nouvelle démonstration et on considérera ce résultat comme acquis dans la suite de l'exercice)*
2) a) Démontrer que (BC) et (AC') sont parallèles.
   b) En reprenant exactement la même démonstration avec la symétrie de centre J, quel résultat analogue obtiendrait-on ? *(on ne rédigera pas cette nouvelle démonstration et on considérera ce résultat comme acquis dans la suite de l'exercice)*
   c) Démontrer que C, A et B' sont alignés
3) a) Déterminer $\widehat{BAC'}+\widehat{BAC}+\widehat{CAB'}$
   b) En déduire la somme des mesures des trois angles du triangle ABC.

II) Angles aigus d'un triangle rectangle :

Soit ABC un triangle rectangle en A. Montrer que $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont complémentaires.

III) Triangles ayant deux angles complémentaires :

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ soient complémentaires. Montrer que ABC est rectangle en A.

IV) Angles à la base dans un triangle isocèle :

Soit ABC un triangle isocèle en A et d la médiatrice de $[BC]$.

1) Montrer que A appartient à d.
2) Déterminer les images de A, B et C par la symétrie d'axe d.
3) Montrer que les angles à la base du triangle ABC sont de même mesure.

V) Triangles isocèles ayant un angle de 60° :

Soit ABC un triangle isocèle en A et ayant un angle de 60°.

1^er^ cas : L'angle de 60° est $\widehat{BAC}$: Déterminer $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. En déduire que ABC est équilatéral.

2^ème^ cas : L'angle de 60° est $\widehat{ABC}$: Déterminer $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BAC}$. En déduire que ABC est équilatéral.

3^ème^ cas : L'angle de 60° est $\widehat{ACB}$: Pourquoi est-il inutile d'étudier ce troisième cas ?

VI) Point de concours des médiatrices :

Soit ABC un triangle quelconque et O le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et de $[AC]$.

1) Montrer que $OA = OB$ puis que $OA = OC$.
2) En déduire que O est le centre du cercle circonscrit au triangle.
3) En déduire également que O appartient aussi à la médiatrice de [BC]