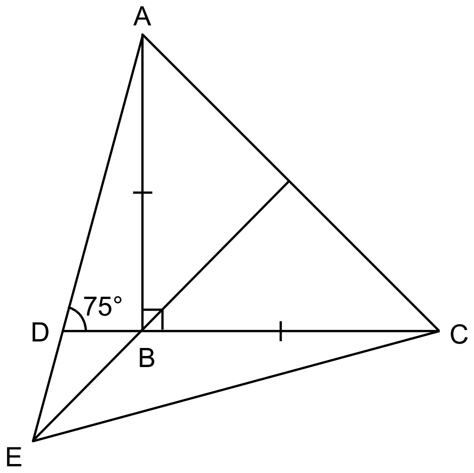
TRIANGLES : DÉMONSTRATIONS RÉDIGÉES

I) ÉNONCÉ

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en B. Sur la droite (BC), on place le point D tel que le triangle ABD soit extérieur à ABC et $\widehat{ADB}=75°$. On appelle E le point de $[AD)$ tel que AE soit égal à AC.

1) Déterminer les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DAC}$.
2) Quelle est la nature du triangle EAC ?
3) Montrer que la droite (EB) est perpendiculaire à (AC).



II) RÉDACTION

<u>Hypothèses</u> :
ABC est un triangle rectangle isocèle en B
$D \in (BC)$ et $\widehat{ADB}=75°$
$E \in [AD)$ et $AE = AC$

1) <u>Calcul de $\widehat{ACB}$</u>.
Par hypothèses, ABC est isocèle en B
Or dans un triangle isocèle, les deux angles à la base sont de même mesure
donc : $\widehat{ACB}=\widehat{CAB}$
De plus, par hypothèses, ABC est rectangle en B
Or dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires
donc $\widehat{ACB}+\widehat{CAB}=90$
donc $2\times\widehat{ACB}=90$
donc $\boxed{\widehat{ACB}=45°}$

<u>Calcul de $\widehat{DAC}$</u>.
Dans le triangle ADC, on a :
- D'après ce qui précède, $\widehat{ACB}=45°$ et par hypothèses $D \in (BC)$ donc $\widehat{ACD}=45°$
- Par hypothèses, $\widehat{ADB}=75°$ et $D \in (BC)$ donc $\widehat{ADC}=75°$

Or dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°
donc $\widehat{DAC}+\widehat{ACD}+\widehat{ADC}=180$
donc $\widehat{DAC}+45+75=180$
donc $\widehat{DAC}+120=180$
donc $\boxed{\widehat{DAC}=60°}$

2) <u>Nature de *EAC*</u>
- Par hypothèses, $AE = AC$ donc le triangle EAC est isocèle en A
- D'après 1), $\widehat{DAC}=60°$ et par hypothèses, $E \in [AD)$ donc $\widehat{EAC}=60°$

Or si un triangle isocèle a un angle de 60°, alors il est équilatéral.
donc $\boxed{\text{le triangle } EAC \text{ est équilatéral}}$

3) <u>(EB) perpendiculaire à (AC)</u>
- Par hypothèses, ABC est isocèle en B
  donc $BA = BC$
  Or tout point équidistant des extrémités d'un segment, appartient à la médiatrice de ce segment.
  donc <u>B appartient à la médiatrice de $[AC]$</u>
- De même, d'après 2), EAC est équilatéral
  donc $EA = EC$
  Or tout point équidistant des extrémités d'un segment, appartient à la médiatrice de ce segment.
  donc <u>E appartient à la médiatrice de $[AC]$</u>

Bilan : (BE) est la médiatrice de $[AC]$
or la médiatrice d'un segment coupe ce segment perpendiculairement en son milieu
donc $\boxed{(EB) \text{ est perpendiculaire à } (AC)}$