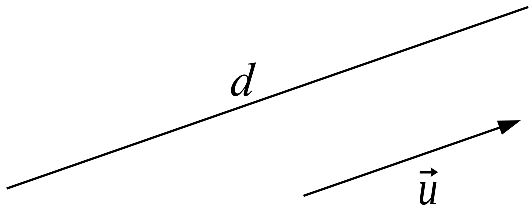
ÉQUATIONS DE DROITES

I) ÉQUATION D'UNE DROITE

1) Vecteur directeur d'une droite

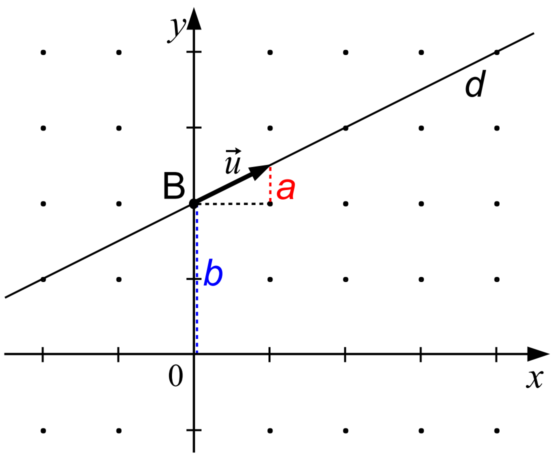
Soit d une droite du plan.
On appelle vecteur directeur de d tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite d.



2) Équation réduite d'une droite « non verticale »

Soit d une droite quelconque, <u>non parallèle à l'axe des ordonnées</u>.
Cette droite coupe donc l'axe des ordonnées en un point que l'on appellera B et elle a un vecteur directeur d'abscisse 1 que l'on appellera $\vec{u}$.

Appelons b l'ordonnée du point B et a celle de $\vec{u}$. On a : $B(0\,;\,b)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$



Soit $M(x\,;\,y)$ un point quelconque du plan.

$$M(x\,;\,y) \in d \iff \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-0\\y-b\end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } \vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{vmatrix}x & 1\\ y-b & a\end{vmatrix} = 0$$

$$\iff a\,x - (y-b) = 0$$

$$\iff a\,x = y - b$$

$$\iff y = a\,x + b$$

Conclusion :

- Toute droite non verticale est donc la représentation graphique d'une fonction affine. Elle une équation de la forme $y = a\,x + b$ appelée « équation réduite » de la droite.
- b est l'ordonnée du point de d d'abscisse 0.
  On l'appelle « ordonnée à l'origine » de la droite d.
- a caractérise la direction de la droite d.
  On l'appelle « coefficient directeur » de d.
- Deux droites non verticales sont donc parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.
- P et Q étant deux points distincts de d, déterminons $\dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$:

  d n'est pas verticale donc $x_Q \neq x_P$ et :

  $$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{a\,x_Q + b - (a\,x_P + b)}{x_Q - x_P} = \frac{a\,x_Q - a\,x_P}{x_Q - x_P} = \frac{a(x_Q - x_P)}{x_Q - x_P} = a$$

2-eqdroites-droite1.html
2-eqdroites-droite2.html
p200 : 34, 36
p201 : 49, 54
p202 : 58, 60, 61, 63
p204 : 86, 89, 90, 91

3) Équation cartésienne d'une droite « quelconque »

Soit d une droite quelconque passant par un point A et ayant un vecteur directeur $\vec{u}$ dont on appellera les coordonnées $-b$ et a.

Soit $M(x\,;y)$ un point quelconque du plan.

$$M(x\,;y)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } \vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-x_A & -b\\ y-y_A & a\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$$

$$\Leftrightarrow ax+by+(-ax_A-by_A)=0$$

Conclusion :

- On remarque que $(-ax_A-by_A)$ est un terme constant qui ne dépend que de A et de $\vec{u}$. Appelons ce terme « c ». L'équation d'une droite peut donc aussi s'écrire sous la forme $ax+by+c=0$ appelée « équation cartésienne » de la droite.
- Une droite a une infinité d'équations cartésiennes équivalentes :
  Ex : $x+2y-1=0 \Leftrightarrow 2x+4y-2=0 \Leftrightarrow -x-2y+1=0$.
  Donc la droite d d'équation : $x+2y-1=0$
  a aussi pour équation : $2x+4y-2=0$ ou encore : $-x-2y+1=0$.
  De plus $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de d.
- a et b ne peuvent pas être nuls en même temps car sinon $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ serait nul et ne pourrait donc pas être un vecteur directeur d'une droite.
- Si $b=0$, alors $a\neq 0$ donc $ax+by+c=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{c}{a}$
  La droite est l'ensemble des points d'abscisses $-c/a$.
  Il s'agit d'une droite verticale.
- Si $a=0$, alors $b\neq 0$ donc $ax+by+c=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{c}{b}$
  La droite est l'ensemble des points d'ordonnées $-c/b$.
  Il s'agit d'une droite horizontale.

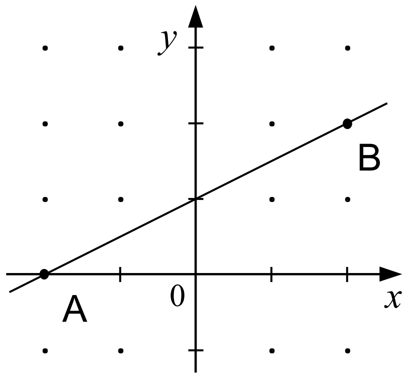
p200 : 35
p201 : 48, 52, 53
p203 : 71, 73

II) DÉTERMINER L'ÉQUATION D'UNE DROITE

1) Connaissant deux points :

Ex : Soient $A(-2\ ;\ 0)$ et $B(2\ ;\ 2)$. Déterminer une équation de (AB).

1ère méthode : $x_A \neq x_B$ donc (AB) n'est pas verticale et a donc une équation de la forme $y = a\,x + b$.



$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-0}{2-(-2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$B\in(AB)$ donc $y_B=\frac{1}{2}x_B+b$ donc $b=2-\frac{2}{2}=1$

(AB) a donc pour équation : $y=\frac{1}{2}x+1$

2ème méthode : Soit $M(x\ ;\ y)$ un point quelconque :

$M \in (AB)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\ y\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+2 & 4\\ y & 2\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 2x+4-4y=0$

$\Leftrightarrow x-2y+2=0$

(AB) a donc pour équation : $x-2y+2=0$ ou encore : $y=\frac{1}{2}x+1$.

2) Connaissant un point et un vecteur directeur :

Ex : Déterminer l'équation de la droite d passant par $A(-2 ; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Soit $M(x ; y)$ un point quelconque :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y\end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } \vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+2 & 2\\ y & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x+2-2y=0$$

$$\Leftrightarrow x-2y+2=0$$

(AB) a donc pour équation : $x-2y+2=0$

3) Parallèle à une droite et passant par un point :

Ex : Déterminer l'équation de d' la parallèle à la droite d d'équation : $y=\frac{1}{2}x+1$ passant par $C(1 ; 0)$.

d et d' étant parallèles, elles ont le même coefficient directeur, donc l'équation de d' est de la forme : $y=\frac{1}{2}x+b$.

de plus $C \in d'$ donc $y_C=\frac{1}{2}x_C+b$ donc $b=0-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$

d' a donc pour équation : $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

p200 : 39, 43, 44 p201 : 46, 50, 51, 55 p203 : 68, 75, 77, 78, 79, 81, 84 p205 : 99, 105 p206 : 109 p209 : 133 p210 : 140	algo p204 : 85 p206 : 108 régressions avec calculatrice p209 : 129

III) LIEN AVEC LES SYSTÈMES « 2 × 2 »

Dans le chapitre sur les systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues, on a étudié les systèmes de la forme : $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$

Comment ne pas faire l'analogie avec des équations cartésiennes de droites !

Conséquence :

De même que deux droites ont pour intersection :	De même un système 2×2 aura pour solutions :
● soit un unique point d'intersection (les droites sont sécantes) ● soit aucun point d'intersection (les droites sont strictement parallèles) ● soit une infinité de points d'intersection (les droites sont confondues)	● soit un unique couple solution (cas général que nous rencontrerons dans les exercices) ● soit aucun couple solution (les 2 équations sont incompatibles) ● soit une infinité de couples solution (les 2 équations sont équivalentes)

p200 : 37
p206 : 115
p207 : 118, 119
p208 : 125
p210 : 139