204 DS de Mathématiques 2h calculatrice interdite 9XI19

Nom :

Exercice 1 : Compléter **directement sur le sujet et sans justifier** avec $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$ **(1 point)**

$\{1; 2; 3; \pi\}$ ... $\mathbb{N}$ $[3 ; 9]$ ... $\mathbb{D}$ $\dfrac{3\pi - 6}{2 - \pi}$ ... $\mathbb{Z}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ... $\mathbb{Q}$

Exercice 2 : Aucune justification n'est attendue pour cet exercice. **(1,5 points)**

1) Je suis un intervalle dont la réunion avec $[4; 6]$ est $[2; 6]$ et dont l'intersection avec $[3; 7]$ est $[3; 5[$. Qui suis-je ?
2) Écrire sous la forme d'intervalle(s) l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à 9 ou strictement inférieurs à 2.
3) Écrire sous la forme d'intervalle(s) l'ensemble des réels tels que $x < 4$ et $x \geq -1$.

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ à l'aide d'un graphique **(1,5 points)**

(E_1): $\left|x - \dfrac{4}{3}\right| = \dfrac{1}{6}$ (I_1): $|x - 4| \leq 3$

Exercice 4 : Compléter le tableau suivant **directement sur le sujet** **(1 point)**

P_1	P_2	$P_1 \Rightarrow P_2$; $P_2 \Rightarrow P_1$; $P_1 \Leftrightarrow P_2$?
$x > 4$	$x > 3$	
$IA = IB$	I milieu de $[AB]$	
$x \in [2; 3]$	$-1 \leq x \leq 9$	
Un nombre entier est pair	Son chiffre des unités est 4	

Exercice 5 : Soit $P(x) = 5(x^2 - 9) - (x - 5)(6 - 2x)$ défini pour tout réel x **(5 points)**

1) Développer, réduire et ordonner $P(x)$
2) Montrer que, pour tout x réel, $P(x) = (x - 3)(7x + 5)$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) (E_2) : $P(x) = 0$
   b) (E_3) : $P(x) = 7x + 5$
4) a) Factoriser, pour tout x réel, $A(x) = 9 - x^2 - (4x - 12)$
   b) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de (E_4): $\frac{A(x)}{P(x)} = 0$

Exercice 6 : On considère les nombres $A = \dfrac{777\,777\,777\,777\,775}{777\,777\,777\,777\,774}$ et $B = \dfrac{777\,777\,777\,777\,774}{777\,777\,777\,777\,775}$ **(3 points)**

1. Comparer A et B.
2. Calculer $C = A - 1$ et $D = 1 - B$.
3. Comparer C et D.
4. Quel est, entre A et B, le nombre le plus proche de 1 ? Justifier.

Exercice 7 : **(5 points)**

Soit a un nombre réel strictement positif et ABCD un rectangle tel que $AB = 2a$ et $AD = a$.
Soit H le projeté orthogonal de A sur le segment $[BD]$. Faire une figure.

1) Exprimer, en fonction de a, la valeur exacte de BD.
2) Montrer que $AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.
3) Soit x la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$. Calculer $\tan x$.
4) Démontrer que l'angle $\widehat{DAH}$ a pour mesure x.
   En déduire DH en fonction de a.
5) Soit S le point du segment $[AB]$ tel que $BS = 0{,}8\, BA$. Les droites (SH) et (AD) sont-elles parallèles ? Justifier.

Exercice 8 : **(2 points)**

C'est en l'an 78 avant Jésus-Christ. Deux capitaines de César ont disposé les hommes de leur légion en deux carrés parfaits pour les faire défiler sur le forum. Les effectifs de ces deux légions diffèrent de 217 hommes. La plus nombreuse a sept rangées de soldats de plus que l'autre. Quel est l'effectif total de ce corps d'armée de César ?

Nom :

I) Pour chaque ligne ci-dessous, indiquer dans la colonne de droite si on a : (P) ⇒ (Q), (Q) ⇒ (P), (P) ⇔ (Q) :

(P)	(Q)	Relation
$(x+5)(x+1)=(3x-2)(x+1)$	$x+5=3x-2$	
$(x+3)(x^2+1)=(x^2+1)(4x-1)$	$x+3=4x-1$	
$(2x-3)^2=(3x-1)^2$	$2x-3=3x-1$	
$\frac{4x-3}{x^2-4}=0$	$x=\frac{3}{4}$	
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=0$	Pour tout x de $[-3\ ;+\infty[$, $f(x)=0$	
$x \in I \cap J$	$x \in I \cup J$	
$(x-4)^2 \geq 0$	$x \in]-\infty\ ;4]$	
$1{,}19 \leq x \leq 1{,}23$	$1{,}1 \leq x \leq 1{,}3$	

II) BOA est un triangle. Les points C et D sont tels que : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
1) Démontrez que O est le milieu de [CD].
2) Les points E et F sont tels que : $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.
Démontrez que ABFE est un parallélogramme.

III)Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

(E_1) : $4x^2+4x+1+(2x+1)(x-1)=4x+2$ (E_2) : $\frac{x+1}{x+2}=x+1$ (E_3) : $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}=0$

IV)1) Démontrer que pour tout réel x : $x-2(x-1)^2=(x-2)(1-2x)$
2) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations ci-dessous :

(E_4) : $x-2(x-1)^2=(3-6x)(1-2x)$ (E_5) : $\frac{x-2(x-1)^2}{4-x^2}=4x-2$

V) Soit ABCD un parallélogramme non aplati et E le symétrique de C par rapport à B.
1) Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, et E dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. (Justifier)
2) Soit F le point de coordonnées (0 ; –1) dans ce repère. Déterminer la nature du quadrilatère DCEF.
3) Montrer que F est le symétrique de D par rapport à A.
4) Déterminer les coordonnées de I, le point d'intersection des droites (DE) et (CF).

VI)Un chef d'entreprise souhaite partager équitablement la somme de 9600 euros entre la totalité de ses employés. Il remarque cependant que s'il exclut de cette prime les quatre responsables de secteur, la part des autres employés est augmentée de 80 euros. On cherche le nombre total d'employés de l'entreprise.
1) Montrer que ce problème revient à résoudre l'équation : $x^2-4x-480=0$ ou x est le nombre total d'employés de l'entreprise.
2) Démontrer que pour tout réel x : $x^2-4x-480=(x-24)(x+20)$
3) Conclure.

BARÈME PROBABLE : I) 4pts II) 2pts III) 3pts IV) 3pts V) 5pts VI) 3pts

NOM :

I) Compléter la colonne de droite

(P)	(Q)	(P)⇒(Q) ou (Q)⇒(P) ou (P)⇔(Q)
$(x-4)^2(x+2)=0$	$x=4$	
$y \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z}$	$y \in \mathbb{N}$	
$x \in]-\infty ; -1]$	$x \in]-\infty ; -\sqrt{2}]$	
(AB)//(CD)	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$	
C∈[KL]	$\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{KL}$	
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$	I milieu de [BC]	
$x \geq 3$ ou $x < 5$	$x \in [3;5]$	
BC=CD	$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$	

II) 1) Compléter le tableau suivant en traduisant chaque situation géométrique par une égalité vectorielle :

Situation géométrique	Égalité vectorielle
PQRS est un parallélogramme	
D' est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{ZU}$	
T est le symétrique de C par rapport à N	

2) Compléter le tableau suivant en traduisant chaque égalité vectorielle par une situation géométrique :

Situation géométrique	Égalité vectorielle
	$\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{ES}=\vec{0}$
	$\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{GO}$
	$\overrightarrow{DM}=k\overrightarrow{EC}$, $k \in \mathbb{R}^*$, E≠C

III)On donne l'algorithme suivant :

```
Saisir p
c prend la valeur de p – 1
p prend la valeur de p + 1
p prend la valeur de  p×p – c×c
Afficher p
```

1) Tester cet algorithme en choisissant comme valeur initiale : p = 2.
2) Écrire le résultat de cet algorithme sous la forme d'une expression la plus simple possible.

IV)Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$(E_1) : 49x^2-9=-2(6-14x)(x+1)$ $\quad (E_2) : \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{7-x^2}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}$ $\quad (E_3) : (2x^2+3x-4)^2=(2x^2+x+5)^2$

V) 1) Soient a et b deux réels quelconques. Montrer que : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
2) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $x^3+8=-4x^2+16$

VI)Soient A, B, C et D quatre points quelconques du plan.
On définit les points M et N par : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$
1) Montrer que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}$.
2) A quelle condition sur le quadrilatère ABDC les points M et N sont-ils confondus ?

VII)Résoudre les problèmes suivants :
1) Déterminer le(s) réel(s) x tel(s) que le produit de la somme du double de x et de 3 par la différence de la moitié de x et de 5 soit égal au carré de x.
2) Existe-t-il un nombre x tel que le quotient de la différence de x et de 5 par 2 soit égal à l'inverse de la somme de x et de 5 ? Si oui, donner la (ou les) valeur(s) de ce nombre.
3) Trouver les nombres réels dont le double est égal au cube.

BARÈME PROBABLE : I) 4pts II) 3pts III) 2pts IV) 4pts V) 2pts VI) 2pts VII) 3pts