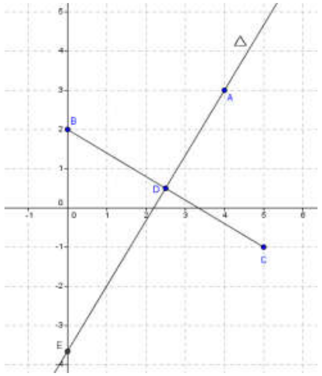
DS du 9/12/14 - Corrigé succinct

Exercice 1 :



2. Que représente D pour [BC] ?

On remarque que : $\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{5}{2}=x_D$ et $\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}=y_D$

donc D est bien le milieu de [BC].

3. Le point A appartient-il à la médiatrice de [BC] ?

Le repère étant orthonormé, on a :

$AB=\sqrt{(x_B \quad x_A)^2+(y_B \quad y_A)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$

$AC=\sqrt{(x_C \quad x_A)^2+(y_C \quad y_A)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

donc $AB=AC$

donc A appartient à la médiatrice de [BC].

4. Coordonnées du point d'intersection de (Δ) avec l'axe des ordonnées :

$E\in(\Delta)$ et $E\in(Oy)$ $\Leftrightarrow EB=EC$ et $x_E=0$

$\Leftrightarrow EB^2=EC^2$ et $x_E=0$

$\Leftrightarrow (x_B \quad x_E)^2+(y_B \quad y_E)^2=(x_C \quad x_E)^2+(y_C \quad y_E)^2$ et $x_E=0$

$\Leftrightarrow (2 \quad y_E)^2=5^2+(\quad 1 \quad y_E)^2$ et $x_E=0$

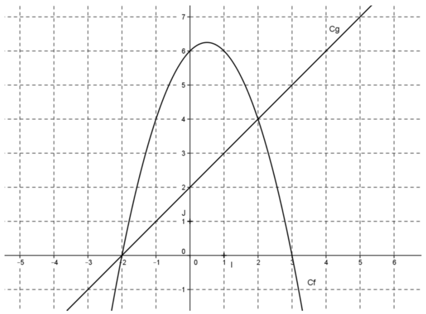
$\Leftrightarrow 4 \quad 4y_E+{y_E}^2=25+(1+2y_E+{y_E}^2)$ et $x_E=0$

$\Leftrightarrow 6y_E=4 \quad 26$ et $x_E=0$

$\Leftrightarrow y_E= \quad \frac{11}{3}$ et $x_E=0$

donc $E\left(0\,; \quad \frac{11}{3}\right)$

Exercice 2 :



1. Lectures graphiques :

a. Les antécédents de 4 par f sont les abscisses des points de C_f d'ordonnée 4. Ce sont : 1 et 2.
   Les antécédents de 7 par f sont les abscisses des points de C_f d'ordonnée 7. Il n'y en a pas !

b. L'image de 1 est l'ordonnée du point de C_f d'abscisse 1.
   $f(\quad 1)=4$

c. Les solutions de l'équation $f(x)=4$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f avec la droite d'équation y = 4. S = { 1 ; 2}.

d. Les solutions de l'inéquation $f(x)>g(x)$ sont les abscisses des points de C_f situés strictement au-dessus de C_g. S =] 2 ; 2[.

e. Les solutions de l'inéquation $0\le f(x)<6$ sont les abscisses des points de C_f compris entre les droites d'équations $y=0$ et $y=6$.
   S = [2 ; 0[∪]1 ; 3].

2. Par le calcul :

a. Antécédents de 0 par f :

$$f(x)=0\Leftrightarrow x^2 \quad x \quad 6=0\Leftrightarrow\left(x \quad \frac{1}{2}\right)^2 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{24}{4}=0\Leftrightarrow\left(x \quad \frac{1}{2} \quad \frac{5}{2}\right)\left(x \quad \frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow(x \quad 3)(x+2)=0$$

Les antécédents de 0 par f sont 2 et 3.

b. Image de $2+\sqrt{5}$:

$f(2+\sqrt{5})= \quad (2+\sqrt{5})^2+(2+\sqrt{5})+6= \quad (4+4\sqrt{5}+5)+2+\sqrt{5}+6= \quad 1 \quad 3\sqrt{5}$

c. Résoudre $f(x)=g(x)$:

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \quad x^2+x+6=x+2\Leftrightarrow \quad x^2+4=0\Leftrightarrow(2 \quad x)(2+x)=0\Leftrightarrow x=2$ ou $x= \quad 2$.

S = { 2 ; 2}

d. Ordonnée de M :

$$y_M=f\left(\quad \frac{7}{3}\right)= \quad \left(\quad \frac{7}{3}\right)^2 \quad \frac{7}{3}+6= \quad \frac{49}{9} \quad \frac{21}{9}+\frac{54}{9}= \quad \frac{16}{9}$$

Exercice 3 :

1. Exprimer $D(v)$ en fonction de v :

La distance de freinage est : $\left(\frac{v}{10}\right)^2=0{,}01v^2$

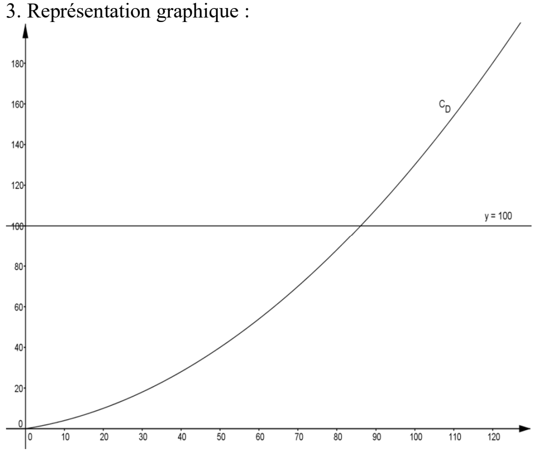
La distance correspondant au temps de réaction du conducteur est : $3\frac{v}{10}=0{,}3v$

donc $D(v)=0{,}01v^2+0{,}3v$

2. Tableau de valeurs :

v	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
$D(v)$	0	4	10	18	28	40	54	70	88	108	130	154	180	208

3. Représentation graphique :



4. Vitesse correspondant à une distance d'arrêt de 100 m :

Cette vitesse est l'abscisse du point d'intersection de C_D avec la droite d'équation y = 100.

La moto mettra donc 100 m pour s'arrêter pour une vitesse d'environ 86 km/h.

Exercice 4 :

1. $D_f=$

2. Si n est pair : $f(n)=\frac{n}{2}$
   Si n est impair : $f(n)=2n+7$.

3. $f(1)=2\times1+7=9$ $\quad f(2)=\frac{2}{2}=1$ $\quad f(5)=2\times5+7=17$ $\quad f(10)=\frac{10}{2}=5$

4. Pour tout n pair, $5n$ est aussi pair, donc $f(5n) \quad 5f(n)=\frac{5n}{2} \quad 5\times\frac{n}{2}=0$
   Pour tout n impair, $5n$ est aussi impair, donc $f(5n) \quad 5f(n)=2\times5n+7 \quad 5(2n+7)= \quad 28$

Exercice 5 :

$D_f=R \quad \left\{ \quad \frac{2}{3}\right\}$

$D_g=R$

$D_h=\,] \quad 3;0\,[\,\cup\,]0;+\infty\,[$

$D_k=\left[\quad \frac{4}{3};+\infty\right[$

$D_l=R^{\,-}$

2A DS du 2X12 1h Corrigé succinct

I) $I =]-5;-2[\cup [-1;5]$ et $J = [-8;0[\cup [5;+\infty[$

$\boxed{I \cup J = [-8;+\infty[}$

$\boxed{I \cap J =]-5;-2[\cup [-1;0[\cup \{5\}}$

II) QCM

1) 3 peut admettre $\boxed{\text{2 antécédents}}$, $\boxed{\text{aucun antécédent}}$

2) $\boxed{f(2) = \frac{7}{3}}$ $\boxed{f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{31}{3}}$ $\boxed{\text{antécédents de 3 : 0 et 3}}$

3) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est définie sur $\boxed{]-\infty;1[}$

4) $\mathcal{C}_f$ passe par $\boxed{A(2;5) \text{ et } C(-1;11)}$

III) Sans justifier

1) $\boxed{D_f = [-7;5]}$

2) $\boxed{f(-2) = 2}$; $\boxed{f(3) = 1}$

3) Antécédents de 0 : $\boxed{-6 \text{ et } 4}$

Antécédents de 1 : $\boxed{-5 ; 0 \text{ et } 3}$

4) L'ensemble des réels ayant exactement 4 antécédents est : $\boxed{]1;3[}$

En justifiant

5) Résoudre graphiquement $f(x) = 3$

les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation $y = 3$

$\boxed{\mathcal{S} = \{-3;2\}}$

Résoudre graphiquement $f(x) = -2$

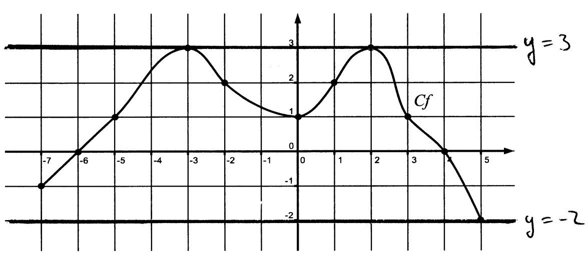
les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation $y = -2$

$\boxed{\mathcal{S} = \{5\}}$

6) Résoudre graphiquement $f(x) > -2$

les solutions sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés strictement au dessus de la droite d'équation $y = -2$

$\boxed{\mathcal{S} = [-7;5[}$



7) Signe de f

Sur $[-7;-6[$ et sur $]4;5]$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de (xx')
donc f est strictement négative

Sur $]-6;4[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (xx')
donc f est strictement positive

En -6 et en 4 f est nulle

IV) 1) $f(0)$ et $f(-2)$

$f(0) = -3\times 0^2 + 6\times 0 - 1 = \boxed{-1}$

$f(-2) = -3(-2)^2 + 6(-2) - 1 = -12 - 12 - 1 = \boxed{-25}$

2) Antécédents de -1

Résolvons (E) : $f(x) = -1$

(E) $\Leftrightarrow -3x^2 + 6x - \cancel{1} = -\cancel{1}$

(E) $\Leftrightarrow -3x(x-2) = 0$

(E) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

$\boxed{0 \text{ et } 2}$ sont donc les deux antécédents de -1 par f

3) Extremum de f

Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x) - f(1)$

$f(x) - f(1) = -3x^2 + 6x - 1 - (-3+6-1)$

$= -3x^2 + 6x - 1 - 2$

$= -3(x^2 - 2x + 1)$

$= -3(x-1)^2$

or un carré est toujours positif

donc $f(x) - f(1) \leq 0$

donc $f(x) \leq f(1)$ avec $f(1) = 2$

donc $\boxed{f \text{ admet un maximum de 2 en 1 sur } \mathbb{R}}$

4) Variations sur $]-\infty;1]$

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 \leq 1$
déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$:

$f(x_1) - f(x_2) = -3x_1^2 + 6x_1 - \cancel{1} + 3x_2^2 - 6x_2 + \cancel{1}$

$= -3(x_1^2 - x_2^2) + 6(x_1 - x_2)$

$= -3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 3(x_1 - x_2)\times(-2)$

$= -3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2)$

or par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$

$x_1 < 1$ et $x_2 \leq 1$ donc $x_1 + x_2 < 2$
donc $x_1 + x_2 - 2 < 0$

Bilan $f(x_1) - f(x_2) < 0$

donc $f(x_1) < f(x_2)$

donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty;1]}$

x	$-\infty$		1
f		$\nearrow$	2