FONCTIONS 2 – PROPRIÉTÉS

I) SIGNE D'UNE FONCTION

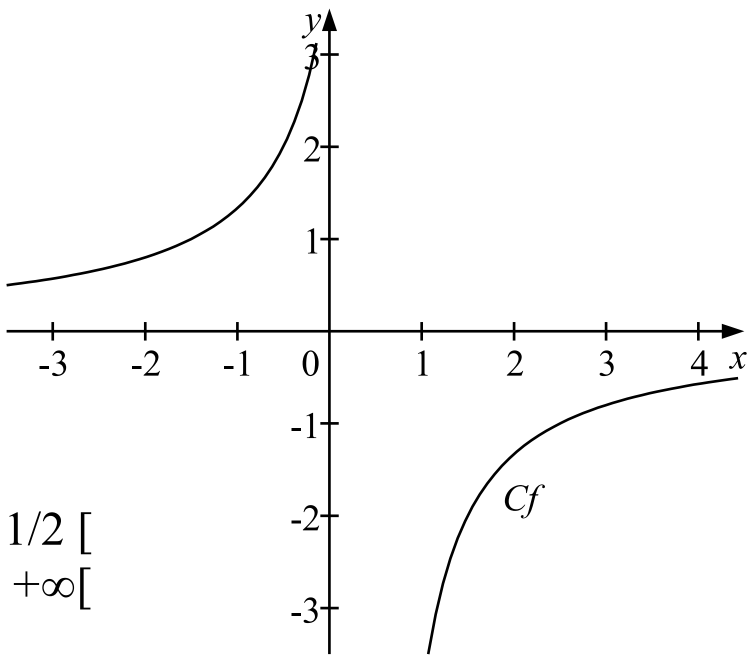
Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- Si, pour tout x de I, $f(x) \geqslant 0$, alors on dit que f est positive sur I.
  Interprétation graphique : Cf est alors située au dessus de l'axe des abscisses.
- Si, pour tout x de I, $f(x) \leqslant 0$, alors on dit que f est négative sur I.
  Interprétation graphique : Cf est alors située au dessous de l'axe des abscisses.

Ex : Étudier le signe de f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ par $x \mapsto \dfrac{-4}{2x-1}$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
-4	$-$		$-$
$2x-1$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	$\|\|$	$-$



f est strictement positive sur $]-\infty\ ;\ 1/2\ [$
f est strictement négative sur $]1/2\ ;\ +\infty[$

II) EXTREMUM D'UNE FONCTION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre de I.

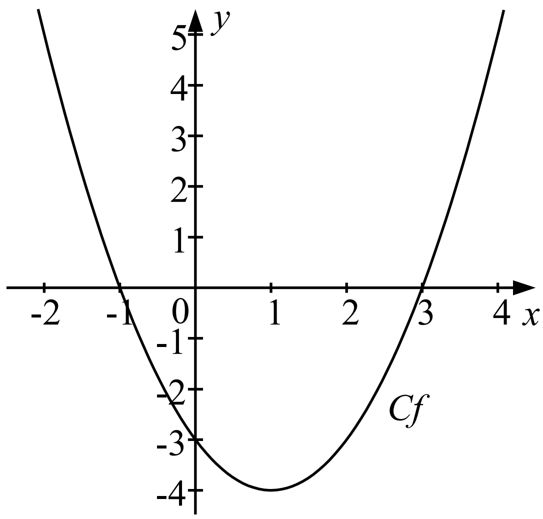
- Si, pour tout x de I, on a $f(x) \geqslant f(a)$ alors on dit que f admet un minimum de $f(a)$ en a sur I.
  Interprétation graphique : Le point le plus bas de Cf est le point de coordonnées $(a\,;f(a))$
- Si, pour tout x de I, on a $f(x) \leqslant f(a)$ alors on dit que f admet un maximum de $f(a)$ en a sur I.
  Interprétation graphique : Le point le plus haut de Cf est le point de coordonnées $(a\,;f(a))$

Ex : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2 - 2x - 3$ a-t-elle un extremum ?

Pour tout x de $\mathbb{R}$,
déterminons le signe de $f(x) - f(1)$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(1) &= x^2 - 2x - 3 - (1 - 2 - 3) \\ &= x^2 - 2x - 3 - (-4) \\ &= x^2 - 2x + 1 \\ &= (x-1)^2 \end{aligned}$$

Or un carré est toujours positif
donc $f(x) - f(1) \geqslant 0$
donc $f(x) \geqslant f(1)$ avec $f(1) = -4$
donc f admet un minimum de -4 en 1 sur $\mathbb{R}$.



p289: 46, 47, 48

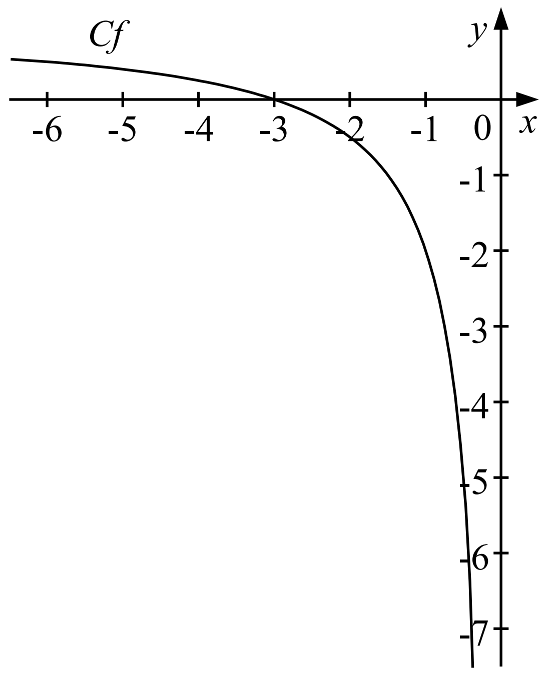
algo
p297 : TP

III) VARIATIONS D'UNE FONCTION

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

- Si, pour tous x_1, x_2 tels que $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, on a $f(x_1) < f(x_2)$ alors on dit que f est strictement croissante sur $[a\ ;\ b]$.
  Interprétation graphique : x_1, x_2 et leurs images $f(x_1)$, $f(x_2)$ sont toujours dans le même ordre donc Cf « monte ».
- Si, pour tous x_1, x_2 tels que $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, on a $f(x_1) > f(x_2)$ alors on dit que f est strictement décroissante sur $[a\ ;\ b]$.
  Interprétation graphique : x_1, x_2 et leurs images $f(x_1)$, $f(x_2)$ sont toujours dans l'ordre inverse donc Cf « descend ».

Ex : Étudier les variations de f définie sur $\mathbb{R}^{*-}$ par $x \mapsto \dfrac{3}{x} + 1$



Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 < 0$
déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{3}{x_1} + 1 - \frac{3}{x_2} - 1$$
$$= \frac{3x_2 - 3x_1}{x_1 x_2}$$
$$= \frac{3(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$$

Or par hypothèses :

$x_1 < 0$ et $x_2 < 0$ donc $x_1 x_2 > 0$

$x_2 > x_1$ donc $x_2 - x_1 > 0$

Bilan : $f(x_1) - f(x_2) > 0$
donc $f(x_1) > f(x_2)$
donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$

oral :
p288: 37
p290: 57, 58, 59, 62

p290: 60, 63, 64
p291: 68
p292: 76