2B DS du 28 II 17 1h30 Corrigé succinct

Partie A

1) Nombre de bibliothèques fabriquées pour un coût de 50 k€

Résolvons l'éq (E) : $C(x) = 50$

(E) $\Leftrightarrow x^2 - 10x + 50 = 50$ et $x \in [5;20]$

(E) $\Leftrightarrow x^2 - 10x = 0$ et $x \in [5;20]$

(E) $\Leftrightarrow x(x-10) = 0$ et $x \in [5;20]$

(E) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 10$ et $x \in [5;20]$

$\mathcal{S} = \{10\}$

Pour un coût de 50 k€, $\boxed{\text{on a fabriqué 10 bibliothèques}}$

2) Coût de fabrication de 18 bibliothèques

Calculons $C(18)$:

$C(18) = 18^2 - 10\times 18 + 50 = 194$

$\boxed{\text{Fabriquer 18 bibliothèques coûte 194 k€}}$

3) Le coût de fabrication journalier peut-il être inf à 25 k€ ?

Résolvons l'inéquation (I) : $C(x) < 25$

(I) $\Leftrightarrow x^2 - 10x + 50 < 25$ et $x \in [5;20]$

(I) $\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 < 0$ et $x \in [5;20]$

(I) $\Leftrightarrow (x-5)^2 < 0$ et $x \in [5;20]$

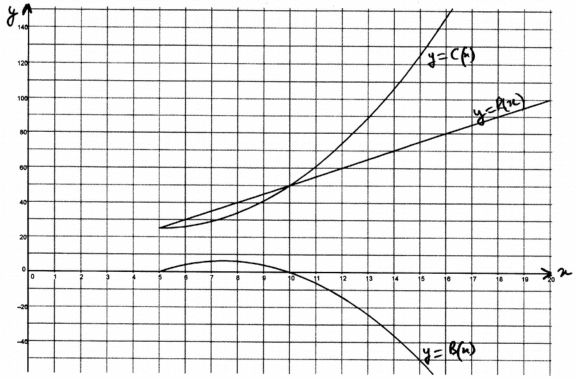
or un carré est toujours positif ou nul donc $\mathcal{S}' = \emptyset$

Donc $\boxed{\text{le coût journalier ne peut être strictement inf à 25 k€}}$

4) Recette R(x)

Pour tout x de $[5;20]$, $\boxed{R(x) = 5x}$ (en k€)

5) Représentation graphique



6) Résoudre $R(x) = C(x)$

les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_C$ avec $\mathcal{C}_R$ $\boxed{\mathcal{S} = \{5 ; 10\}}$

7) Résoudre $R(x) > C(x)$

les solutions sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_R$ situés au dessus de $\mathcal{C}_C$ $\boxed{\mathcal{S} =]5;10[}$

8) Bénéfice B(x)

Pour tout x de $[5;20]$, $B(x) = R(x) - C(x)$

$= 5x - (x^2 - 10x + 50)$

$= \boxed{-x^2 + 15x - 50}$

9) Maximum de la fonction B

Pour tout x de $[5;20]$, déterminons le signe de $B(x) - B\left(\frac{15}{2}\right)$:

$B(x) - B\left(\frac{15}{2}\right) = -x^2 + 15x - 50 - \left(-\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 15\times\frac{15}{2} - 50\right)$

$= -x^2 + 15x - \cancel{50} + \frac{15^2}{4} - \frac{15^2}{2} + \cancel{50}$

$= -x^2 + 15x - \frac{15^2}{4}$

$= -\left(x^2 - 15x + \left(\frac{15}{2}\right)^2\right)$

$= -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2$

Or un carré est toujours positif ou nul

donc $B(x) - B\left(\frac{15}{2}\right) \leq 0$

donc $B(x) \leq B\left(\frac{15}{2}\right)$ avec $B\left(\frac{15}{2}\right) = \frac{25}{4}$

donc $\boxed{B \text{ admet un maximum de } \frac{25}{4} \text{ en } \frac{15}{2} \text{ sur } [5;20]}$

Partie B

11) Augmentation des tarifs

Le nouveau prix de vente d'une bibliothèque est :

$5 + 5\times\frac{20}{100} = 5 + 1 = 6$ (k€)

Pour tout x de $[5;20]$, la nouvelle recette est $\boxed{R'(x) = 6x}$ (k€)

12) Nouveau bénéfice

Pour tout x de $[5;20]$, $B'(x) = R'(x) - C(x)$

$B'(x) = 6x - (x^2 - 12x + 55)$

$\boxed{B'(x) = -x^2 + 18x - 55}$

13) Vérification d'égalité

Pour tout x de $[5;20]$, $\boxed{-(x-6)(x-12)} = -(x^2 - 6x - 12x + 72)$

$= -(x^2 - 18x + 72)$

$= \boxed{-x^2 + 18x - 72}$

14) Bénéfice supérieur ou égal à 17 k€

Résolvons l'inéquation : (I') : $B'(x) \geq 17$

(I') $\Leftrightarrow -x^2 + 18x - 55 \geq 17$

(I') $\Leftrightarrow -x^2 + 18x - 72 \geq 0$

(I') $\Leftrightarrow -(x-6)(x-12) \geq 0$ (d'après 13))

(I') $\Leftrightarrow (x-6)(x-12) \leq 0$

x	5		6		12		20
$x-6$		−	0	+		+	
$x-12$		−		−	0	+	
Π		+	0	−	0	+	

$\mathcal{S} = [6;12]$

L'entreprise doit donc vendre $\boxed{\text{entre 6 et 12 bibliothèques}}$ pour avoir un bénéfice supérieur ou égal à 17 k€

15) Algorithme

Cet algorithme va afficher les valeurs de I telles que $B'(I) \geq 17$

Il permet donc de déterminer le nombre de bibliothèque que l'entreprise doit fabriquer et vendre quotidiennement pour avoir un bénéfice supérieur ou égal à 17 000 €

les valeurs affichées seront donc : $\boxed{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}$

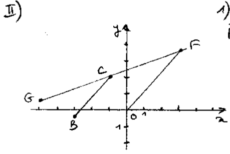
2G Composition du 15 mars 2016 3h Corrigé succinct

I) QCM :

1) c 2) bc 3) a 4) ac 5) c

6) cd 7) ac 8) abd 9) ac 10) bc

II)



1) Coordonnées de F

$\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FC} \iff \begin{cases} x_G - x_F = 2(x_C - x_F) \\ y_G - y_F = 2(y_C - y_F) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -5 - x_F = 2(-1 - x_F) \\ \frac{1}{2} - y_F = 2(2 - y_F) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_F = 3 \\ y_F = \frac{7}{2} \end{cases}$ $\boxed{F(3 ; \frac{7}{2})}$

2) Montrer que (BC) et (OF) sont parallèles

Par (H) $B(-3 ; -\frac{1}{3})$ et $C(-1 ; 2)$ donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

D'après 1) $F(3 ; \frac{7}{2})$ donc $\overrightarrow{OF}\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

on remarque que $3\overrightarrow{BC} = 6\vec{i} + 7\vec{j} = 2\overrightarrow{OF}$

donc $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OF}$

donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OF}$ sont colinéaires

donc $\boxed{\text{(BC) et (OF) sont parallèles}}$

III)

1) Domaine de définition de f

$\boxed{D_f = [-9 ; +\infty[}$

2) Minimum de f

On ne peut pas conclure !!

ex1 :

x	-9		-2		1		$+\infty$
f	-3	↘	-5	↗	4	↘	-3

f admet un minimum de −5 en −2 sur Df

ex2 :

x	-9		-2		1		$+\infty$
f	-3	↘	-5	↗	4	↘	$-\infty$

f n'admet pas de minimum sur Df.

3) Encadrement de $f(x)$

D'après le tableau de variations,

f admet un minimum de −5 en −2 sur $[-9 ; 1]$

f admet un maximum de 4 en 1 sur $[-9 ; 1]$

donc si $x \in [-9 ; 1]$ alors $\boxed{-5 \leq f(x) \leq 4}$

4) Résoudre sur Df : $f(x) \leq -1$

$\boxed{S = [-9 ; 0] \cup [3 ; +\infty[}$

IV)

1) Domaine de définition

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 2 \neq 0\}$

or un carré est toujours positif donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2) Vérification d'égalité

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\boxed{\frac{6}{x^2+2} - 1 = \frac{6 - x^2 - 2}{x^2+2} = \frac{4 - x^2}{x^2+2} = f(x)}$

3) Maximum de f

D'après Cf, on conjecture que f admet un maximum de 2 en 0 sur $\mathbb{R}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x) - f(0)$:

$$f(x) - f(0) = \frac{6}{x^2+2} - 1 - \left(\frac{6}{2} - 1\right)$$
$$= \frac{6}{x^2+2} - 3$$
$$= \frac{6 - 3(x^2+2)}{x^2+2}$$
$$= \frac{-3x^2}{x^2+2}$$

or un carré est toujours positif donc $-3x^2 \leq 0$ et $x^2 + 2 > 0$

donc $f(x) - f(0) \leq 0$

donc $f(x) \leq f(0)$ avec $f(0) = 2$

donc $\boxed{\text{f admet un maximum de 2 en 0 sur } \mathbb{R}}$

4) Variations de f sur $\mathbb{R}^-$

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 \leq 0$

déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{6}{x_1^2+2} - 1 - \frac{6}{x_2^2+2} + 1$$
$$= \frac{6(x_2^2+2) - 6(x_1^2+2)}{(x_1^2+2)(x_2^2+2)}$$
$$= \frac{6(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2+2)(x_2^2+2)}$$
$$= \frac{6(x_2 - x_1)(x_1 + x_2)}{(x_1^2+2)(x_2^2+2)}$$

or par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_2 - x_1 > 0$

$x_1 < 0$ et $x_2 \leq 0$ donc $x_1 + x_2 < 0$

de plus un carré est toujours positif ou nul

donc $x_1^2 + 2 > 0$ et $x_2^2 + 2 > 0$

Bilan, $f(x_1) - f(x_2) < 0$ donc $f(x_1) < f(x_2)$

donc $\boxed{\text{f est strictement croissante sur } \mathbb{R}^-}$

Variation de f sur $\mathbb{R}^+$

Pour tous x_1, x_2 tels que $0 \leq x_1 < x_2$

déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{6(x_2 - x_1)(x_1 + x_2)}{(x_1^2+2)(x_2^2+2)}$$

or par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_2 - x_1 > 0$

$x_1 \geq 0$ et $x_2 > 0$ donc $x_1 + x_2 > 0$

et on a toujours $x_1^2 + 2 > 0$ et $x_2^2 + 2 > 0$

Bilan, $f(x_1) - f(x_2) > 0$ donc $f(x_1) > f(x_2)$

donc $\boxed{\text{f est strictement décroissante sur } \mathbb{R}^+}$

Tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↗	2	↘	

5) Signe de f

Pour tout x de Df, $f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2+2} = \frac{(2-x)(2+x)}{x^2+2}$

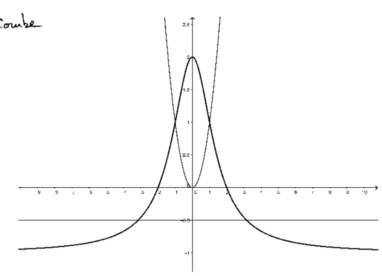
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2-x$		+		+	0	−	
$2+x$		−	0	+		+	
x^2+2		+		+		+	
$f(x)$		−	0	+	0	−	

f est strictement négative sur $]-\infty ; -2[$ et sur $]2 ; +\infty[$
f est strictement positive sur $]-2 ; 2[$
f est nulle en −2 et en 2

6) Tableau de valeurs

x	−10	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	−0,94	−0,91	−0,84	−0,67	0	2	0	−0,67	−0,84	−0,91	−0,94

7) Courbe



8) ⓐ Résolution graphique de (E)

les solutions sont les abscisses des points d'intersection de Cf avec la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$

$\boxed{S = \{-a ; a\} \text{ avec } a \approx 3,16}$

ⓑ Résolution algébrique de (E)

(E) : $f(x) = -\frac{1}{2}$ (pas de valeurs interdites)

(E) $\iff \frac{6}{x^2+2} - 1 = -\frac{1}{2}$

(E) $\iff \frac{6}{x^2+2} = \frac{1}{2}$

(E) $\iff 12 = x^2 + 2$

(E) $\iff x^2 = 10$

(E) $\iff x = -\sqrt{10}$ ou $x = \sqrt{10}$

$\boxed{S = \{-\sqrt{10} ; \sqrt{10}\}}$

9) ⓑ Résolution graphique de (I)

les solutions sont les abscisses des points de Cf situés en dessous de Cg

$\boxed{S =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[}$

ⓒ Vérification d'égalité

Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$\boxed{(x^2 - 1)(x^2 + 4) = x^4 - x^2 + 4x^2 - 4 = x^4 + 3x^2 - 4}$

ⓓ Résolution algébrique de (I)

(I) : $f(x) < x^2$ (pas de valeurs interdites)

(I) $\iff \frac{6}{x^2+2} - 1 < x^2$

(I) $\iff \frac{6 - (x^2+2) - x^2(x^2+2)}{x^2+2} < 0$

(I) $\iff \frac{-x^4 - 3x^2 + 4}{x^2+2} < 0$

(I) $\iff \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^2+2} > 0$

(I) $\iff \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 4)}{x^2+2} > 0$

or un carré est toujours positif

(I) $\iff x^2 - 1 > 0$

(I) $\iff (x - 1)(x + 1) > 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		−		−	0	+	
$x+1$		−	0	+		+	
x^2-1		+	0	−	0	+	

$\boxed{S =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[}$

V)

1) Que représentent M, N, P ?

On est dans un repère orthonormé donc :

$AB = \sqrt{(i - e)^2 + (j - f)^2} = M$

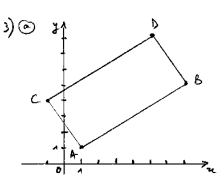
$AC = \sqrt{(k - e)^2 + (l - f)^2} = N$

$BC = \sqrt{(i - k)^2 + (j - l)^2} = P$

2) Compléter l'algorithme

- Afficher ABDC est un parallélogramme (diagonales ont même milieu)
- ABDC est un rectangle (parallélogramme avec un angle droit)
- ABDC est un carré (losange avec un angle droit)
- ABDC est un losange

3) ⓐ



$M = AB = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$

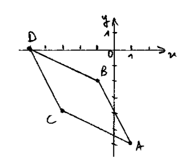
$N = AC = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$P = BC = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}$

On est dans le cas où $M \neq N$ mais $M^2 + N^2 = 52 + 13 = 65 = P$

donc le programme affiche : ABDC est un parallélogramme
ABDC est un rectangle

ⓑ



$M = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$

$N = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$

$P = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$

On est dans le cas où $M = N$ mais $M^2 + N^2 = 40 \neq P^2$

donc le programme affiche : ABDC est un parallélogramme
ABDC est un losange.