Une entreprise fabrique des bibliothèques toutes identiques en bois massif.
On appelle x le nombre de bibliothèques fabriquées dans une journée et on sait que x est toujours compris entre 5 et 20 inclus.
Le coût de fabrication en milliers d'euros de x bibliothèques, peut alors s'écrire : $C(x) = x^2 - 10x + 50$.
Dans la suite, on utilisera la notation : 1 K€ = 1 000 €

Partie A : (*Attention : Justifier les réponses 1 à 3 par un calcul, une équation ou une inéquation*)

1) Si le coût de fabrication est de 50 K€, quel est le nombre de bibliothèques fabriquées ?
2) Combien coûte la fabrication de 18 bibliothèques ?
3) Le coût de fabrication journalier peut-il être strictement inférieur à 25 K€ ?
4) Chaque bibliothèque fabriquée est aussitôt vendue 5 K€.
   Exprimer la recette $R(x)$ en fonction de x, en milliers d'euros.
5) Tracer sur le graphique ci-contre la courbe représentative de la fonction R sur [5 ; 20]
6) Résoudre graphiquement : $R(x) = C(x)$
7) Résoudre graphiquement : $R(x) > C(x)$
8) Le bénéfice $B(x)$ est la différence entre la recette et le coût de production.
   Montrer que, pour tout x de [5 ; 20], $B(x) = -x^2 + 15x - 50$ (en milliers d'euros)
9) Montrer que la fonction B admet un maximum en 15/2 sur [5 ; 20].
10) Tracer sur le graphique ci-contre la courbe représentative de la fonction B

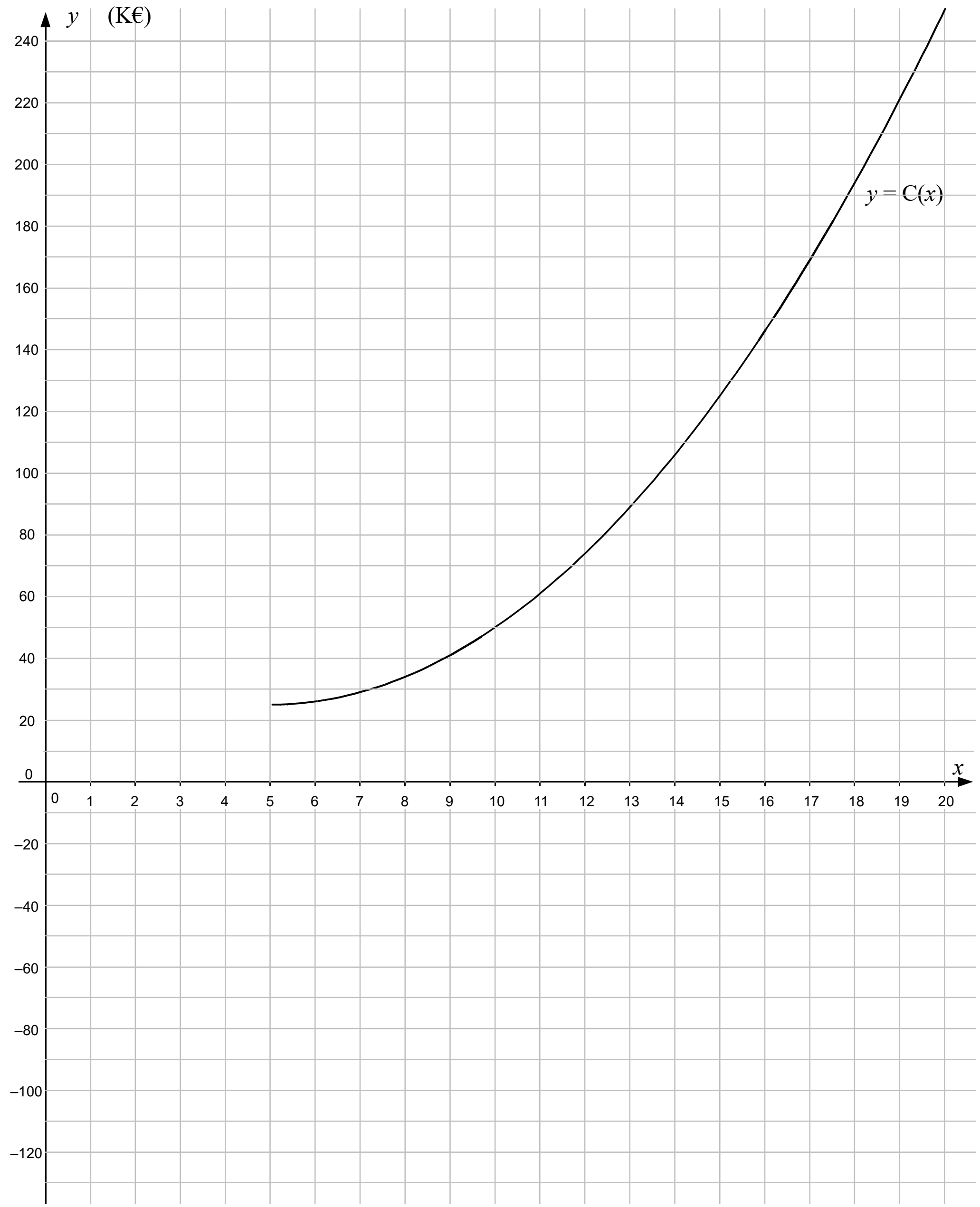
Partie B :

11) L'entreprise estime ses bénéfices insuffisants pour pouvoir investir et financer son développement.
    Elle décide donc d'augmenter ses tarifs de 20 %.
    Quel est le nouveau prix de vente d'une bibliothèque ?
    Quelle est la nouvelle recette $R'(x)$ en milliers d'euros pour x appartenant à [5 ; 20] ?
12) Dans le même temps, la modernisation de l'atelier permet de réduire significativement les coûts de fabrication, qui s'élèvent désormais, en milliers d'euros, à $C'(x) = x^2 - 12x + 55$.
    Déterminer le nouveau bénéfice $B'(x)$ en milliers d'euros, pour x appartenant à [5 ; 20].
13) Montrer que, pour tout x de [5 ; 20] : $-x^2 + 18x - 72 = -(x-6)(x-12)$
14) En déduire le nombre de bibliothèques que l'entreprise doit vendre pour que son bénéfice soit supérieur ou égal à 17 000 €.
15) On donne l'algorithme suivant :

```
Variables :    I entier naturel, N réel
Traitement :   Pour I allant de 5 à 20 :
                   Affecter à N la valeur – I² + 18 I – 55
                   Si N ≥ 17
                       Afficher I
                   Fin Si
               Fin Pour
```

    Que fait cet algorithme ? Préciser les valeurs affichées par l'algorithme.

Nom :

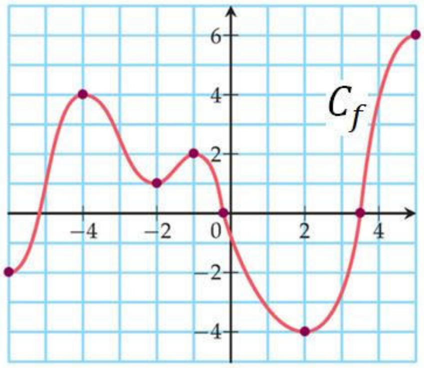


NOM :	COMPOSITION DE MATHEMATIQUES	15 mars 2016
Classes de 2nde		
Calculatrice autorisée		Durée : 3h00

Exercice 1 : QCM : (2,5 points)

*Pour chacune des questions suivantes, **entourer** la (ou les) lettre(s) des bonnes réponses sur le sujet.*

Pour les questions 1 à 5, on considère C_f, la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-6;5]$.



1) Sur $[-6;0]$, le minimum de f est :
a) 2 | b) -4 | c) -2 | d) -6

2) La fonction f est strictement croissante sur :
a) $[0;5]$ | b) $[-2;-1]$ | c) $[2;5]$ | d) $[-4;6]$

3) Le tableau de variations de f est :

a)

x	-6		-4		-2		-1		2		5
Variations de f	-2	↗	4	↘	1	↗	2	↘	-4	↗	6

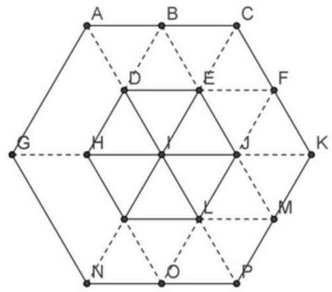
b)

x	-6		-4		-2		-1		$3,5$		5
Variations de f	-2	↗	4	↘	1	↗	2	↘	0	↗	6

4) Sur $[-6;0]$, l'équation $(E_1): f(x) = 1$ admet :
a) -2 pour solution | b) exactement 2 solutions | c) exactement 3 solutions

5) Sur $[-6;5]$, l'ensemble solution de l'inéquation $(I_1): f(x) \leq -4$ est :
a) $[4;6]$ | b) $[-6;-4]$ | c) $\{2\}$ | d) D_f

Pour les questions 6 à 10, on considère la figure suivante réalisée à l'aide de triangles équilatéraux :



6) Dans le repère $(N;\overrightarrow{NO};\overrightarrow{NI})$,
a) $\overrightarrow{IJ}\binom{1}{1}$ | b) $J(1;2)$ | c) $\overrightarrow{IJ}\binom{1}{0}$ | d) $J(1;1)$

7) Les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{KF}$ sont :
a) Opposés | b) parallèles | c) colinéaires

8) Dans le repère $(E;\overrightarrow{ON};\overrightarrow{EI})$,
a) $A(2;-1)$ | b) $D(1;0)$ | c) $M(2;2)$ | d) $M(-2;2)$

9) Le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est égal à :
a) $\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{IJ}$ | b) $\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{IL}$ | c) $\overrightarrow{JM}$ | d) $\overrightarrow{LI}$

10) Dans le repère $(A;\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$,
a) $C(2;0)$ | b) $C(0;2)$ | c) $\overrightarrow{ML}\binom{0}{-1}$ | d) $\overrightarrow{IJ}\binom{1}{0}$

Exercice 2 : Application directe du cours : (2 points)

Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les trois points suivants :
$B\left(-3;-\frac{1}{3}\right)$; $C(-1;2)$ et $G\left(-5;\frac{1}{2}\right)$.

1) Calculer les coordonnées de F tel que : $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FC}$

2) Démontrer que (BC) et (OF) sont parallèles.

Exercice 3 : (2,25 points)

Voici le tableau de variation d'une fonction f.

x	-9		-2		0		1		3		$+\infty$
var f	-3	↘	-5	↗	-1	↗	4	↘	-1	↘	

1) Déterminer, sans justifier, le domaine de définition de f noté D_f.

2) La fonction f admet-elle un minimum sur D_f? Si oui, déterminer sa valeur.

3) Donner un encadrement de l'image de x par f lorsque x appartient à l'intervalle $[-9;1]$? Justifier.

4) Résoudre, sans justifier, sur D_f l'inéquation $f(x) \leq -1$.

Exercice 4 : (9,5 points)

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{4-x^2}{x^2+2}$. C_f est la courbe représentative de cette fonction f.

1) Déterminer son domaine de définition D_f.

2) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{6}{x^2+2} - 1$.

3) Montrer que f admet 2 pour maximum sur $\mathbb{R}$.

4) Etudier les variations de f sur $]-\infty;0]$ puis sur $[0;+\infty[$. Dresser son tableau de variations.

5) Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.

6) Dresser un tableau de valeurs sur $[-10;10]$ avec un pas de 2. On donnera des arrondis au centième.

7) Sur papier millimétré, tracer C_f dans un repère orthogonal en prenant comme unité 1cm sur l'axe des abscisses et 4cm sur l'axe des ordonnées.

8) On considère l'équation $(E): f(x) = -\frac{1}{2}$.

a) Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$, l'équation (E).

b) Résoudre algébriquement sur $\mathbb{R}$, l'équation (E).

9) On considère l'inéquation $(I): f(x) < x^2$.

a) Sur le même graphique, tracer la courbe représentative C_g de la fonction $g: x \longmapsto x^2$. Il n'est pas demandé de tracer le tableau de valeurs.

b) Résoudre graphiquement sur $\mathbb{R}$, l'inéquation (I).

c) Montrer que pour tout x réel, $x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2-1)(x^2+4)$

d) Résoudre algébriquement sur $\mathbb{R}$, l'inéquation (I).

Exercice 5 : (3,75 points)

Soit e, f, i, j, k et l, six réels. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(e;f)$, $B(i;j)$, $C(k;l)$. Les valeurs des réels e, f, i, j, k et l sont telles que les points A, B et C sont deux à deux distincts.
On considère l'algorithme suivant (dont le but est de déterminer la nature précise d'un quadrilatère) :

Variables : $e, f, i, j, k, l, t, u, M, N, P$
Entrée des données :
Saisir les coordonnées de A : e, f
Saisir les coordonnées de B : i, j
Saisir les coordonnées de C : k, l
Traitement des données et sortie :
t prend la valeur $i - e + k$
u prend la valeur $j - f + l$
Afficher D est le point de coordonnées $(t\ ;\ u)$
Afficher …………………… est un parallélogramme.
M prend la valeur $\sqrt{(i-e)^2+(j-f)^2}$
N prend la valeur $\sqrt{(k-e)^2+(l-f)^2}$
P prend la valeur $\sqrt{(i-k)^2+(j-l)^2}$
Si $M \neq N$
  Alors
  Si $M^2 + N^2 = P^2$
    Alors afficher ……………………………………………..
  Fin du Si
  Sinon
  Si $M^2 + N^2 = P^2$
    Alors afficher …………………………………………....
    Sinon afficher……………………………………………….
  Fin du Si
Fin du Si

1) Que représentent les variables M, N et P dans cet algorithme ?

La question 3 peut aider à répondre à la question 2 grâce à l'étude de deux cas.

2) Compléter, sur le sujet, les quatre parties pointillées de l'algorithme ?

3) Pour chacun des cas, il est demandé de tracer un repère (un différent par cas), de placer les points A, B, C et D, de déterminer les valeurs de M, N et P et enfin, de conclure sur ce que le programme renvoie.

a) $e = 1$; $f = 1$; $i = 7$; $j = 5$; $k = -1$ et $l = 4$.

b) $e = 1$; $f = -6$; $i = -1$; $j = -2$; $k = -3$ et $l = -4$.