FONCTIONS 2

Ex 1 - Soit f la fonction définie par $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$

1) Déterminer Df, l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer les images de 2, –1, $\dfrac{1}{4}$.
3) Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé d'unité 2cm.
4) Déterminer algébriquement le signe de f et interpréter graphiquement.
5) Résoudre graphiquement $f(x) \geqslant 1$.

Ex 2 - On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :
$x \longmapsto \sqrt{2}\,x-\sqrt{3}$

1) Calculer l'image de $-\sqrt{2}$.
2) Déterminer le ou les antécédents de 0 et $\sqrt{2}$.
3) Étudier le signe de f.
4) Tracer la courbe Cf.

Ex 3 - Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{1-x}$

1) Déterminer le signe de $x^2 + x$ en fonction de x. En déduire Df, l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer le signe de f.
3) Tracer Cf la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2cm.
4) Résoudre graphiquement (E) : $f(x) = x$.
5) Résoudre graphiquement (I) : $f(x) > 1$.

Ex 4 - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x(x+2)-8-4x$

1) Déterminer le signe de f.
2) f admet-elle un extremum ? Si oui, le déterminer.
3) Représenter graphiquement f.

Ex 5 - f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -3x^2+6x+9$

1) Déterminer le ou les antécédents de 9
2) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -3(x-3)(x+1)$
3) Déterminer le signe de f.
4) Représenter graphiquement f.
5) Montrer que f admet un extremum que l'on caractérisera. Interpréter graphiquement.

Ex 6 - Soit f définie sur $]-3\,;+\infty[$ par : $x \longmapsto \dfrac{1}{x+3}$

1) Étudier les variations de f et faire un tableau de variations.
2) En déduire un encadrement de $f(x)$ lorsque : $0 \leqslant x \leqslant 2$.
3) Tracer la courbe Cf.
4) Résoudre graphiquement $f(x) > x + 1/2$.

Ex 7 - Soit f la fonction définie par $x \longmapsto \dfrac{x+4}{x+2}$

1) Déterminer Df.
2) Calculer les images de 0 et $\sqrt{2}$.
3) Déterminer le signe de f puis interpréter graphiquement.
4) Étudier les variations de f et faire un tableau de variations.
5) Représenter graphiquement f.
6) Résoudre graphiquement : $f(x) = 3$.

Ex 8 - Soit f la fonction définie par $x \longmapsto \dfrac{12}{x^2+3}$

1) Déterminer Df, l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer les images par f de $-\dfrac{1}{2}$, $1+\sqrt{2}$.
3) Déterminer les antécédents de 3.
4) Montrer que f admet 4 pour extremum sur $\mathbb{R}$.
5) Déterminer le sens de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
6) Soit $a \in \mathbb{R}^+$. En vous appuyant sur les variations ci-dessus, comparer les nombres $f(a)$ et $f(a + 1)$.

Ex 9 - Soit f la fonction définie par $x \longmapsto \dfrac{4}{1+x^2}$

1) Montrer que f admet un maximum. Interpréter graphiquement.
2) Déterminer le sens de variations de f et dresser un tableau de variations.
3) Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal d'unités 2cm en abscisses et 4cm en ordonnées.
4) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) > x + 2$.

Ex 10 - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2x^2-x-4$

1) Montrer que f admet un minimum en $x = 1/4$.
2) Déterminer les variations de f et dresser un tableau de variations.
3) En justifiant à l'aide des variations, donner le meilleur encadrement possible de $f(x)$ dans chacun des cas suivants :
   a) $x \in [1\,;2]$ b) $x \in [-2\,;-1]$ c) $x \in [-2\,;2]$

Ex 11 - Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{10}{x^2-4}$

1) Déterminer Df, l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que, sur l'intervalle $]-2\,;2[$, f admet un maximum en $x = 0$.
3) Suivant les valeurs du réel k, déterminer sans justifier le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.