FONCTIONS 3 – FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

I) PARITÉ D'UNE FONCTION

1) Fonction paire

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
On dit que f est paire si pour tout x de D :
- $-x$ appartient aussi à D
- $f(-x) = f(x)$

Interprétation graphique :
Pour tout x de D, les points M(x, $f(x)$) et M'($-x$; $f(x)$) sont tous deux sur Cf et sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
Donc la courbe Cf est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Intérêt :
A la symétrie de la courbe correspond une symétrie des variations et des extrema. Si donc une fonction est paire, on peut se contenter de l'étudier sur D^+, puis en déduire l'étude sur D^- par « symétrie ».

2) Fonction impaire

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
On dit que f est impaire si pour tout x de D :
- $-x$ appartient aussi à D
- $f(-x) = -f(x)$

Interprétation graphique :
Pour tout x de D, les points M(x, $f(x)$) et M''($-x$; $-f(x)$) sont tous deux sur Cf et sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
Donc la courbe Cf est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3) Justifier la parité d'une fonction : Les 4 possibilités

Étudier la parité des fonctions ci-dessous :

Ex 1 : Soit f la fonction carrée : $x \mapsto x^2$
La fonction carrée est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-x$ appartient aussi à $\mathbb{R}$
et $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
Bilan : f est paire

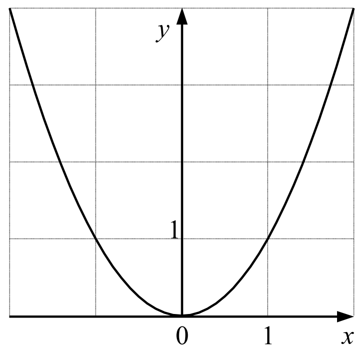
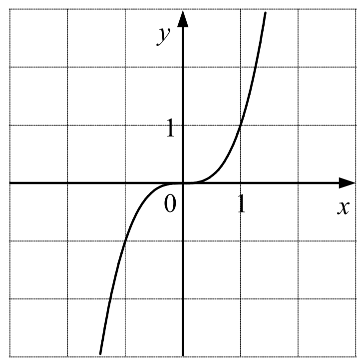
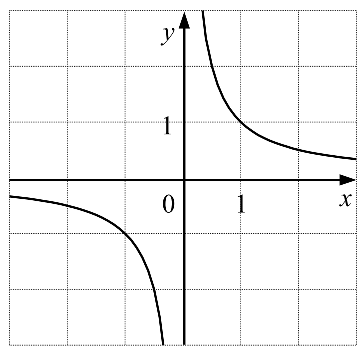
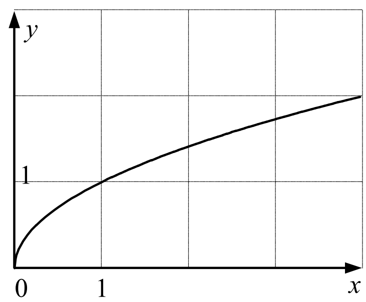
Ex 2 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$ par : $x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$
Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$, $-x$ appartient aussi à $\mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$
et $g(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2-1} = -\dfrac{x}{x^2-1} = -g(x)$
Bilan : g est impaire

Ex 3 : Soit h la fonction racine : $x \mapsto \sqrt{x}$
La fonction racine est définie sur $\mathbb{R}^+$.
On remarque que : 5 appartient à $\mathbb{R}^+$ mais -5 n'appartient pas à $\mathbb{R}^+$
Bilan : h est ni paire, ni impaire

Ex 4 : Soit i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto x + 1$
On remarque que : $i\,(5) = 6$ et $i\,(-5) = -4$
Ces deux nombres sont ni égaux, ni opposés.
Bilan : i est ni paire, ni impaire

p233 : 66, 67
p234 : 71

II) FONCTIONS DE RÉFÉRENCES

fonction	Df	parité	variations	courbe
affine $x \mapsto ax + b$	$\mathbb{R}$	ni paire, ni impaire si a et b sont non nuls,	si $a < 0$, si $a > 0$,	
carrée $x \mapsto x^2$			$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline x^2 & & & \end{array}$	
cube $x \mapsto x^3$			$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline x^3 & & & \end{array}$	
inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$			$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline \frac{1}{x} & & & \end{array}$	
racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$			$\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline \sqrt{x} & & & \end{array}$	

p288 : 41
p289 : 54, 55

p233 : 62
p235 : 83, 86
p236 : 88, 89, 97
p237 : 100, 101, 102, 106

comparaison de x, x^2, x^3 sur $\mathbb{R}^+$
p232 : 50, 51

symétrie $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$
p179 : 89

modélisation
p292 : 71
p294 : 86
p296 : 95

algo
p269 : TP
p294 : 85

III) VARIATIONS PAR ENCADREMENTS SUCCESSIFS

Exemple :

Étudier les variations sur $]-\infty\ ;\ 1]$ de f : $x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)^4$

Rédaction :

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 \leqslant 1$

on a $x_1 - 1 < x_2 - 1 \leqslant 0$

la fonction carrée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

donc $(x_1-1)^2 > (x_2-1)^2 \geqslant 0$

la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc $(x_1-1)^4 > (x_2-1)^4 \geqslant 0$

donc $\frac{1}{2}(x_1-1)^4 > \frac{1}{2}(x_2-1)^4 \geqslant 0$

donc $f(x_1) > f(x_2)$

donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$

En essayant d'utiliser les 2 méthodes d'étude des variations vues cette année (étude du signe de $f(x_1) - f(x_2)$ et encadrements successifs), déterminer les variations des fonctions suivantes :

f définie sur $\mathbb{R}^-$ par $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$

g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \mapsto \frac{x}{x+1}$

Remarque :

- Si x « apparaît plusieurs fois » dans l'écriture de $f(x)$, soit on transforme l'écriture de $f(x)$ pour pouvoir utiliser cette nouvelle méthode, soit on étudie le signe de $f(x_1) - f(x_2)$.