2B DS du 23/1/17 2h Corrigé succinct

I) QCM : $\boxed{\text{F V F F V V V F V F}}$

II) Partie A

1) Forme canonique de $f(x)$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\boxed{2(x-1)^2-8} = 2(x^2-2x+1)-8$
$= 2x^2-4x-6 = \boxed{f(x)}$

2) Extremum de f

Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x)-f(1)$

$f(x)-f(1) = 2(x-1)^2-8-2(1-1)^2+8 = 2(x-1)^2$

or un carré est toujours positif ou nul

donc $f(x)-f(1) \geq 0$ donc $f(x) \geq f(1)$ avec $f(1)=-8$

donc $\boxed{f \text{ admet un minimum de } -8 \text{ en } x=1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

3) Variations sur $]-\infty;1]$

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 \leq 1$

on a : $x_1-1 < x_2-1 \leq 0$

or la fonction carrée est st. décroissante sur $\mathbb{R}^-$

donc $(x_1-1)^2 > (x_2-1)^2 \geq 0$

donc $2(x_1-1)^2 > 2(x_2-1)^2 \geq 0$

donc $2(x_1-1)^2-8 > 2(x_2-1)^2-8$

donc $f(x_1) > f(x_2)$

donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty;1]}$

Variations sur $[1;+\infty[$

Pour tous x_1, x_2 tels que $1 \leq x_1 < x_2$

on a : $0 \leq x_1-1 < x_2-1$

or la fonction carrée est st. croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc $0 \leq (x_1-1)^2 < (x_2-1)^2$

donc $2(x_1-1)^2 < 2(x_2-1)^2$

donc $2(x_1-1)^2-8 < 2(x_2-1)^2-8$

donc $f(x_1) < f(x_2)$

donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [1;+\infty[}$

Tableau de variations

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↘	-8	↗	

4) Signe de f

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 2(x-1)^2-8$

$= 2[(x-1)^2-2^2] = 2(x-1-2)(x-1+2) = 2(x-3)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f est strictement positive sur $]-\infty;-1[$ et sur $]3;+\infty[$
f est strictement négative sur $]-1;3[$
f est nulle en $x=-1$ et $x=3$

5) Intersection de $\mathcal{C}_f$ avec (Ox)

$M(x,y) \in \mathcal{C}_f \cap (Ox) \iff \begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x\in D_f \end{cases} \iff \begin{cases} f(x)=0 \\ y=0 \\ x\in\mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-3)(x+1)=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

$\mathcal{C}_f$ a donc deux points d'intersection avec (Ox) :
$\boxed{C(-1;0) \text{ et } D(3;0)}$

Intersection de $\mathcal{C}_f$ avec (Oy)

$M(x;y) \in \mathcal{C}_f \cap (Oy) \iff \begin{cases} y=f(x) \\ x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=f(0) \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=-6 \end{cases}$

$\mathcal{C}_f$ a donc un point d'intersection avec (Oy) : $\boxed{E(0;-6)}$

6) (a) Représentation graphique de h

$h(-2) = -2(-2)+6 = 4+6 = 10$ donc $\boxed{A(-2;10) \in \mathcal{C}_h}$

$h(2) = -2(2)+6 = -4+6 = 2$ donc $\boxed{B(2;2) \in \mathcal{C}_h}$

h étant une fonction affine, sa représentation graphique est donc la droite (AB)

(b) Variations de h

h est affine et pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x) = -2x+6$

donc $\boxed{h \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$

(c) Positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et (AB)

Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x)-h(x)$

$f(x)-h(x) = 2(x-3)(x+1)-(-2)(x-3)$
$= 2(x-3)(x+1+1)$
$= 2(x-3)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $x \in]-\infty;-2[$ ou $]3;+\infty[$, $f(x)-h(x)>0$
donc $f(x)>h(x)$ donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (AB)
Si $x \in]-2;3[$, $f(x)-h(x)<0$
donc $f(x)<h(x)$ donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de (AB)
Si $x=-2$ ou $x=3$, $f(x)=h(x)$
donc $\mathcal{C}_f$ et (AB) sont sécantes.

Partie B

1) D_g

$D_g = \{x\in\mathbb{R} \,/\, 6x+1 \neq 0\}$ donc $\boxed{D_g = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{6}\right\}}$

2) Forme réduite de g

Pour tout x de D_g,

$\boxed{\frac{1}{3}-\frac{\frac{19}{3}}{6x+1} = \frac{6x+1-19}{3(6x+1)} = \frac{6x-18}{3(6x+1)} = \frac{2x-6}{6x+1} = g(x)}$

3) Variations de g sur $\left]-\frac{1}{6};+\infty\right[$

Pour tous x_1, x_2 tels que $-\frac{1}{6} < x_1 < x_2$

on a : $-1 < 6x_1 < 6x_2$

$0 < 6x_1+1 < 6x_2+1$

or la fonction inverse est st. décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

donc $\frac{1}{6x_1+1} > \frac{1}{6x_2+1}$

donc $-\frac{19/3}{6x_1+1} < -\frac{19/3}{6x_2+1}$

donc $\frac{1}{3}-\frac{19/3}{6x_1+1} < \frac{1}{3}-\frac{19/3}{6x_2+1}$

donc $g(x_1) < g(x_2)$

donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \left]-\frac{1}{6};+\infty\right[}$

Tableau de variations

D'après l'énoncé, g est aussi str. croissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{6}\right[$

donc :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{6}$		$+\infty$
g		↗	$\Vert$	↗	

4) (a) Résoudre graphiquement (E) : $f(x)=g(x)$

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec $\mathcal{C}_g$

$\boxed{S = \{a;0;3\} \text{ avec } a \approx -1{,}2}$

(b) Résoudre (E) par le calcul

(E) : $f(x) = g(x)$ condition $x \in D_g$

(E) $\iff 2(x-3)(x+1) = \frac{2x-6}{6x+1}$ et $x \neq -\frac{1}{6}$

(E) $\iff 2(x-3)(x+1)(6x+1) = 2(x-3)$ et $x \neq -\frac{1}{6}$

(E) $\iff 2(x-3)(x+1)(6x+1)-2(x-3)=0$ et $x \neq -\frac{1}{6}$

(E) $\iff 2(x-3)[(x+1)(6x+1)-1]=0$ et $x \neq -\frac{1}{6}$

(E) $\iff 2(x-3)[6x^2+7x+1-1]=0$ et $x \neq -\frac{1}{6}$

(E) $\iff 2(x-3)(6x+7)x=0$ et $x \neq -\frac{1}{6}$

(E) $\iff x=3$ ou $x=-\frac{7}{6}$ ou $x=0$

$\boxed{S = \left\{-\frac{7}{6};0;3\right\}}$

I)

1) Question de cours

ⓐ fonctions affines :

si $m < 0$ alors la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
si $m = 0$ alors la fonction est constante sur $\mathbb{R}$
si $m > 0$ alors la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

ⓑ fonction carré

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	↘	0	↗

ⓒ fonction inverse

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	↘	‖	↘

2) Application

ⓐ Comparer $(-1-\sqrt{3})^2$ et $(-2-\sqrt{3})^2$

On a $-2 < -1 < 0$
donc $-2-\sqrt{3} < -1-\sqrt{3} < -\sqrt{3}$
or la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$
donc $\boxed{(-2-\sqrt{3})^2 > (-1-\sqrt{3})^2}$

ⓑ Comparer $\frac{1}{-\pi+2}$ et $\frac{1}{-3{,}14+2}$

on a $3 < 3{,}14 < \pi$
donc $-3 > -3{,}14 > -\pi$
donc $-1 > -3{,}14+2 > -\pi+2$
or la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$
donc $\boxed{\frac{1}{-3{,}14+2} < \frac{1}{-\pi+2}}$

II) Partie A

1) Ensemble de définition

$Df = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2+1 \neq 0\}$
or un carré est toujours positif ou nul donc $x^2+1 > 0$
donc $\boxed{Df = \mathbb{R}}$

2) Réécriture de $f(x)$

Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$$1 + \frac{3}{x^2+1} = \frac{x^2+1+3}{x^2+1} = \frac{x^2+4}{x^2+1} = f(x)$$

3) Maximum de f

On conjecture que f admet un maximum en $x = 0$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x) - f(0)$:
$$f(x) - f(0) = 1 + \frac{3}{x^2+1} - 1 - 3$$
$$= \frac{3}{x^2+1} - 3$$
$$= \frac{3 - 3(x^2+1)}{x^2+1}$$
$$= \frac{-3x^2}{x^2+1}$$
or un carré est toujours positif ou nul donc $-3x^2 \leq 0$
et $x^2+1 > 0$
donc $f(x) - f(0) \leq 0$ donc $f(x) \leq f(0)$ avec $f(0) = 4$
donc $\boxed{f \text{ admet un maximum de } 4 \text{ en } 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$

4) Variation de f sur $\mathbb{R}^-$

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 \leq 0$
la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$
donc $x_1^2 > x_2^2 \geq 0$
donc $x_1^2+1 > x_2^2+1 \geq 1$
or la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$
donc $\frac{1}{x_1^2+1} < \frac{1}{x_2^2+1}$
donc $\frac{3}{x_1^2+1} < \frac{3}{x_2^2+1}$
donc $1 + \frac{3}{x_1^2+1} < 1 + \frac{3}{x_2^2+1}$
donc $f(x_1) < f(x_2)$
donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^-}$

5) Intersection avec l'axe des abscisses

$$M(x;y) \in \mathcal{C}f \cap (Ox) \iff \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x \in Df \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \frac{x^2+4}{x^2+1} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = -4 \\ y = 0 \end{cases}$$
or un carré ne peut être négatif donc $\boxed{\mathcal{C}f \text{ ne coupe pas } (Ox)}$

6) Vérification d'égalité

ⓐ Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = x^2 + x + 1$$

ⓑ Positions relatives de $\mathcal{C}f$ et d

Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x) - (3x+4)$
$$f(x) - (3x+4) = 1 + \frac{3}{x^2+1} - 3x - 4$$
$$= \frac{3}{x^2+1} - 3x - 3$$
$$= \frac{\cancel{3} - 3x^3 - 3x - 3x^2 - \cancel{3}}{x^2+1}$$
$$= \frac{-3x(x^2+x+1)}{x^2+1}$$
$$= \frac{-3x\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]}{x^2+1}$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-3x$		$+$	0	$-$	
$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$		$+$		$+$	
x^2+1		$+$		$+$	
$f(x) - (3x+4)$		$+$		$-$	

} un carré est toujours positif ou nul

Bilan : si $x < 0$ alors $f(x) > 3x+4$ donc $\mathcal{C}f$ est située au dessus de d
si $x = 0$ alors $f(x) = 3x+4$ et $\mathcal{C}f$ et d sont sécantes
si $x > 0$ alors $f(x) < 3x+4$ donc $\mathcal{C}f$ est située en dessous de d

Partie B

1)

y	1,3	1,4	1,6	1,9	2,5	3,4
S	0,65	1,35	2,15	3,1	4,35	6,05
x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0

la valeur retournée en fin d'algorithme est $\boxed{S = 6{,}05}$

2) la variable d contient la largeur des rectangles
le calcul $y \times d$ donne l'aire du rectangle en cours
la variable S contient la somme des aires des rectangles

3) Pour rendre l'approximation plus précise, il faut travailler avec des rectangles plus fins donc il faut diminuer la valeur de d

4) Algorithme :

```
0 → S
0,5 → D
-3 → X
While X<0
    (X²+4)/(X²+1) → Y
    S+Y×D → S
    X+D → X
End
Disp S
```

Approximation de l'aire au dixième près :

En exécutant l'algorithme avec des valeurs de d de plus en plus petites, on constate qu'à partir de $d \approx 0{,}05$ l'aire se stabilise à $S = 6{,}7$ (au dixième près)