FONCTIONS 3 – FONCTIONS DE RÉFÉRENCES 13.1

Ex 1 - En s'appuyant sur les variations des fonctions de références, comparer les nombres ci-dessous :

1) $(-5,3)^2$ et $(-5,81)^2$
2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$
3) $\left(\dfrac{24}{7}\right)^2$ et $\left(\dfrac{10}{3}\right)^2$
4) $-2(\sqrt{2}+1)+5$ et $-2(\sqrt{2}+2)+5$
5) $\dfrac{1}{\pi^2}$ et $\dfrac{1}{3,14^2}$

Ex 2 - Tracer la représentation graphique de la fonction carrée et en déduire l'ensemble des réels x tels que :

1) $0 \leqslant x^2 \leqslant 3$ 2) $4 < x^2 < 16$ 3) $x^2 > 7$

Ex 3 - f est la fonction inverse. Préciser le minimum et le maximum de f sur les intervalles suivants :

1) $[-5 ; -1]$
2) $[0,1 ; 0,2]$
3) Que dire pour $[-2 ; 2]$?

Ex 4 - Soit x un réel strictement positif et M le point d'abscisse x situé sur la courbe d'équation $y = 1/x$. On appelle alors N le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.

1) Exprimer ON et MN en fonction de x.
2) Démontrer que l'aire du triangle OMN est constante.

Ex 5 - Encadrer x^2, puis $2x^2 - 1$ dans les cas suivants:

1) $1 \leqslant x \leqslant 4$ 2) $-2 < x < -1/2$ 3) $-1 < x < 2$

Ex 6 - On considère la parabole d'équation $y = x^2$ sur laquelle on place 4 points distincts A, B, C et D d'abscisses respectives a, b, c et d. A quelle condition sur les réels a, b, c et d les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
Même question avec l'hyperbole d'équation $y = 1/x$.

Ex 7 - Dans un même repère, tracer les courbes d'équations : $y = x$; $y = x^2$ et $y = 1/x$.
En vous aidant de ces courbes, dites si les implications ci-dessous sont vraies ou fausses. Dans le cas où elles sont fausses, modifier le terme de droite pour quelles deviennent vraies.

1) $x < 1/x \Rightarrow x \in]0 ; 1[$
2) $x^2 < x \Rightarrow x \in]0 ; 1[$
3) $x^2 > 1/x \Rightarrow x \in]1 ; +\infty[$

Ex 8 - Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto 2x^4 - 2$.

1) Étudier la parité de f.
2) Étudier les variations de f par encadrements successifs.
3) Étudier le signe de f.
4) Représenter graphiquement f.
5) Résoudre algébriquement, puis graphiquement l'équation : (E) : $f(x) = 6$

Ex 9 - Soit f la fonction définie par : $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Étudier la parité de f.
3) Montrer que f admet un extremum que l'on précisera.
4) Étudier les variations de f par encadrements successifs.
5) Représenter graphiquement f.
6) Déterminer le ou les antécédents éventuels de 0,5.

Ex 10 - Soit f la fonction : $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Exprimer $f(x)$ sous la forme d'un quotient.
3) Étudier la parité de f.
4) Étudier les variations de f par encadrements successifs.
5) Étudier le signe de f sur Df.
6) 0 a-t-il une image par f ? et un antécédent ?
7) -1 a-t-il une image par f ? et un antécédent ?
8) Résoudre $f(x) > -1$

Ex 11 - Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto 2x^2 - 8x + 8$.

1) Factoriser $f(x)$, puis déterminer le signe de f.
2) Étudier la parité de f.
3) Étudier les variations de f par encadrements successifs.
4) Représenter graphiquement f.
5) Résoudre graphiquement $f(x) > -4x + 8$.

Ex 12 - Soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x-1}$.

1) Montrer que pour tout x de Df, $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x-1}$.
2) Étudier les variations de f par encadrements successifs.
3) Étudier le signe de f.
4) Résoudre algébriquement $f(x) = 3$

Ex 13 - Soit f définie par : $x \longmapsto \dfrac{1-x^3}{x^3}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) f est-elle paire ou impaire ?
3) Étudier les variations de f par encadrements successifs.. (Commencer par transformer l'écriture de $f(x)$)
4) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de Cf avec les axes, puis tracer Cf.
5) Résoudre algébriquement puis graphiquement : $f(x) = -x - 1$

Ex 14 - Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Étudier la parité de f.
3) A l'aide des variations de la fonction racine carrée, montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} \geqslant 1$. En déduire que f admet un extremum que l'on caractérisera.
4) Étudier les variations de f par encadrements successifs.
5) Représenter graphiquement f.

Ex 15 - Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^3}}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) f est-elle paire ou impaire ?
3) Simplifier l'écriture de $f(x)$.
4) Étudier le signe de f.
5) Étudier les variations de f par encadrements successifs.
6) Représenter graphiquement f.

Ex 16 - Un vendeur de caviar propose un tarif dégressif :

Poids (g)	[0 ; 30[	[30 ; 100[	[100 ; 200]
Prix (€/g)	2	1,5	1

Exemple de calcul : Le prix pour 40g est $30\times2+10\times1,5=75$€.

1) On note $f(x)$ le prix en euros pour x grammes de caviar. Montrer que : $f(50) = 90$€ et $f(200) = 265$€.
2) Exprimer $f(x)$ en fonction de x sur $[0 ; 30[$, puis $[30 ; 100[$ et enfin $[100 ; 200]$.
3) Représenter graphiquement f.
4) On dispose de 240€. Combien de grammes de caviar peut-on acheter ? (Résoudre graphiquement l'équation correspondante)