INÉQUATIONS

I) PRÉLIMINAIRE : TABLEAU DE SIGNE

Un tableau de signe est un outil commode pour déterminer le signe d'une expression qui contient **une seule** variable.

1) Exemple : Signe de –2 *x* + 3

$-2x + 3 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x \geqslant -3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \dfrac{3}{2}$

$(-2x + 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x < -3 \quad \Leftrightarrow \quad x > \dfrac{3}{2})$

Récapitulons ces résultats dans un "tableau de signe" :

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$	0	$-$	

2) Signe d'une expression du 1er degré

Propriété :

Dans un tableau de signe :

$-\dfrac{b}{a}$ est la valeur de x qui « annule » l'expression $ax + b$.

A droite de cette valeur, $ax + b$ est du signe de a.

A gauche, $ax + b$ est du signe contraire.

Démonstration :

Soit (I) : $x > -\dfrac{b}{a}$ $\qquad (a \neq 0)$

(I) $\Leftrightarrow \quad a^2 x > -ba \quad$ et $\quad a \neq 0$

(I) $\Leftrightarrow \quad a^2 x + ba > 0 \quad$ et $\quad a \neq 0$

(I) $\Leftrightarrow \quad a(ax+b) > 0 \quad$ et $\quad a \neq 0$

(I) $\Leftrightarrow \quad a$ et $(ax+b)$ sont du même signe et $\quad a \neq 0$

Bilan, pour $a \neq 0$ on a : $\quad x > -\dfrac{b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad ax + b$ est du signe de a

3) Signe d'un produit ou d'un quotient

Ex : Étudier le signe de $A(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ en fonction de x.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Bilan : $A(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ; -1\right[\cup \left]1\ ; +\infty\right[$
$A(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1\ ; 1\right[$
$A(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

p261 : 40, 41, 42

II) ÉQUIVALENCES

Pour être certain de résoudre les inéquations par équivalences successives, nous nous appuierons sur les propriétés suivantes :

A, B, C étant des réels quelconques, on a :

1) $A > B \Leftrightarrow A + C > B + C$
2) $A > B \Leftrightarrow A - C > B - C$
3) **Si C > 0 alors :** $A > B \Leftrightarrow AC > BC$
   Si C < 0 alors : $A > B \Leftrightarrow AC < BC$
4) **Si C > 0 alors :** $A > B \Leftrightarrow \dfrac{A}{C} > \dfrac{B}{C}$
   Si C < 0 alors : $A > B \Leftrightarrow \dfrac{A}{C} < \dfrac{B}{C}$

Remarque :

Il n'y a pas de propriété simple pour les inéquations produit ou quotient…
Mais peu importe puisque nous avons les tableaux de signe !

Ex: Résoudre dans $\mathbb{R}$, (I) : $\frac{4}{x} \geqslant 1$

Condition : $x \neq 0$

Méthode fausse :

(I) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 4 \geqslant x \\ x \neq 0 \end{cases}$

Équivalence fausse :
On a multiplié les 2 membres de (I)
par x qui peut changer de signe !

S = $]-\infty ; 0[\cup]0 ; 4]$

Méthode juste :

(I) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \frac{4}{x} - 1 \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ cf 2)

(I) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \frac{4-x}{x} \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$4-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
Q		$-$	||	$+$	0	$-$	

S = $]0 ; 4]$

Inéquations :
p261 : 41 → 46, 48
p262 : 55 → 60
p263 : 64 → 75, 79
p264 : 81, 82, 83

Pb concrets :
p263 : 77, 78
p264 : 85
p266 : 91, 92, 94, 95

Algo :
p269 : TP

III) DANS LES EXERCICES

Ex : Résoudre dans $\mathbb{R}$: (I): $\dfrac{4(x+1)}{x+3} \geqslant x+1$

Conditions :

$x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$

S'il y a des conditions, les préciser

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4(x+1)}{x+3} - (x+1) \geqslant 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4(x+1)-(x+1)(x+3)}{x+3} \geqslant 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

A chaque étape, penser à écrire l'équivalence et les conditions

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(4-x-3)}{x+3} \geqslant 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(1-x)}{x+3} \geqslant 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

Factoriser en un produit ou quotient positif ou négatif, puis faire un tableau de signe

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Q		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

S = $]-\infty\ ;\ -3[\ \cup\ [-1\ ;\ 1]$