NOMBRES ET CALCULS

I) NOTATIONS UTILISÉES EN LYCÉE

1) Ensembles de nombres

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels (positifs)
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs (positifs ou négatifs)
- $\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des nombres décimaux
  (qui peuvent s'écrire avec un nombre <u>fini</u> de décimales, donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$!)
- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels
  (quotients <u>d'entiers</u> donc $\frac{\pi}{2} \notin \mathbb{Q}$!)
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels
  (tous les nombres connus en 2de)

2) Notations complémentaires

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls
- $\mathbb{Q}^*$ désigne l'ensemble des rationnels sauf zéro
- $\mathbb{R} \setminus \{1 ; 3\}$ désigne l'ensemble des réels sauf 1 et 3

3) Montrer qu'un nombre est décimal

Pour montrer qu'un nombre appartient à $\mathbb{D}$, il peut être commode de le convertir en fraction décimale. En effet, un nombre possédant n décimales peut toujours s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$

Ex : $0{,}12345=\frac{12345}{100000}=\frac{12345}{10^5}$

Exercice 1 : $\frac{4}{25}$ est-il décimal ?

$\frac{4}{25}=\frac{16}{100}=0{,}16$ donc $\frac{4}{25} \in \mathbb{D}$

Exercice 2 : Démonstration « par l'absurde » à connaître :

A l'inverse, montrons que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal :

Supposons que $\frac{1}{3}$ soit décimal.

alors il existe deux entiers a et n, tels que $\frac{1}{3}=\frac{a}{10^n}$

donc $a=\frac{10^n}{3}$

or la somme des chiffres de 10^n est toujours égale à 1 donc 10^n ne peut être divisible par 3

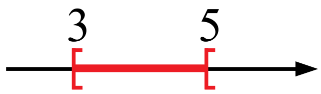
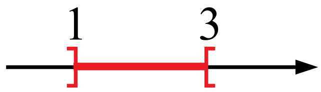
donc a ne peut être entier

donc l'hypothèse de départ ne peut être vraie

p21: 15, 21
p22: 36, 37
p24: 81, 82
+ feuille 1.1

4) Intervalles de ℝ

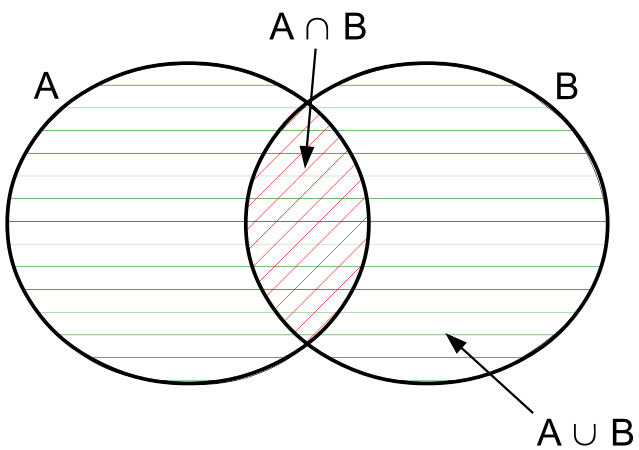
Un intervalle de ℝ est un ensemble de réels définis par un encadrement ou une inégalité.

L'ensemble des réels x tels que :	se représente graphiquement :	et se note :
$3 \leqslant x < 5$		[3 ; 5[
$3 > x > 1$		]1 ; 3[
$-10 \leqslant x$		[–10 ; +∞[

5) Intersections et réunions d'ensembles

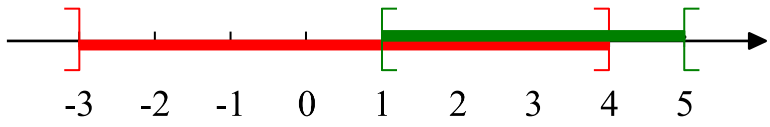
Soient deux ensembles A et B.

- La réunion de A et de B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B. On la note A ∪ B.
- L'intersection de A et de B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B. On la note A ∩ B.

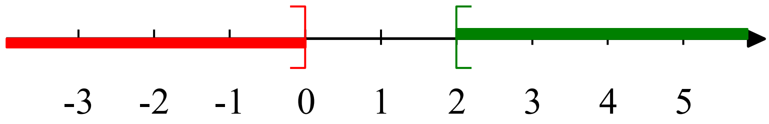


Ex avec des intervalles :

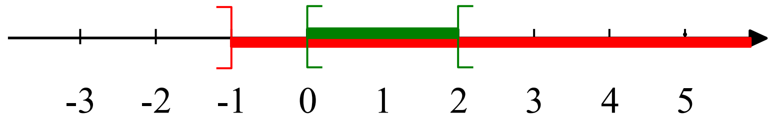
- A = [1 ; 5[et B =]–3 ; 4]
  A ∩ B = [1 ; 4]
  A ∪ B =]–3 ; 5[



- A = [2 ; +∞[et B =]–∞ ; 0]
  A ∩ B = ∅
  A ∪ B =]–∞ ; 0] ∪ [2 ; +∞[



- A = [0 ; 2[et B =]–1 ; +∞[
  A ∩ B = [0 ; 2[= A
  A ∪ B =]–1 ; +∞[= B



p22: 46, 53, 54
p23: 56, 57, 58, 67
p26: 110, 111
p27: 119

6) Dans les exercices

Avant de modifier une expression contenant une variable, il faut définir cette variable et notamment vérifier qu'elle ne prend pas de valeurs interdites.
Voici donc quelques réflexes de rédaction à prendre dès le début de l'année :

Ex1 : Développer : $A=(2x-1)(x^2+2)$

Pour tout x de $\mathbb{R}$: $A=(2x-1)(x^2+2)=2x^3-x^2+4x-2$

Ex2 : Simplifier : $B=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^2-1}$

Conditions : $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ et $x\neq -1$

Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-1 ; 1\}$: $B=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=x+1$

Ex3 : Résoudre (E) : $x^2+4>4x$

(E) $\Leftrightarrow$ $x^2-4x+4>0$
(E) $\Leftrightarrow$ $(x-2)^2>0$
Or un carré est toujours positif ou nul
S = $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

Ex4 : Résoudre (I) : $-3x+1\geqslant x-3$

(I) $\Leftrightarrow$ $-4x\geqslant -4$
(I) $\Leftrightarrow$ $x\leqslant 1$
S = $]-\infty ; 1]$

II) RÈGLES DE CALCUL

1) Quotients :

CONDITION	RÈGLE
$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b}$
$a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}^*$; $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$
$a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}^*$; $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$
$a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}^*$; $c \in \mathbb{R}^*$ et $d \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$

2) Puissances : (*n* et *m* entiers strictement positifs)

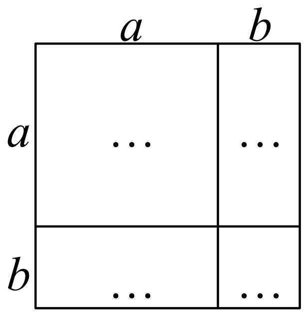
CONDITION	RÈGLE
$a \in \mathbb{R}^*$	$a^0=1$
$a \in \mathbb{R}^*$	$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$
$a \in \mathbb{R}$	$a^m \times a^n=a^{m+n}$
$a \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$
$a \in \mathbb{R}$	$(a^m)^n=a^{m\times n}$
$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$	$(ab)^n=a^n b^n$
$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

Remarque : Il n'y a pas de règle avec a^m+a^n

3) Identités remarquables :

CONDITION	RÈGLE
$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Rem : illustration géométrique de $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$:



p22: 41
p25: 86
p26: 100, 107
p28: 136, 137

p69: 3, 4, 5, 7, 8
p79: 27, 31
p80: 43, 44, 50, 53, 55
p81: 59, 60, 61, 62
p90: 154

comparer 2 nombres :
p86 : 114, 115, 116, 118

III) FACTORISER UNE EXPRESSION

Factoriser une expression, c'est chercher à la transformer en un produit de facteurs du 1[er] degré. Pour cela, 2 techniques à essayer <u>dans l'ordre</u> :

1) D'abord, chercher un facteur commun

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$A=(4x-3)(x+2)-x(8x-6)-4x+3$
$A=(4x-3)(x+2)-2x(4x-3)-(4x-3)$
$A=(4x-3)[x+2-2x-1]$
$A=(4x-3)(1-x)$

2) Ensuite seulement, chercher une identité remarquable

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$B=32x^2-48x+18$
$B=2(16x^2-24x+9)$
$B=2(4x-3)^2$

p81: 64, 65, 70
p84 : 101, 102

IV) VALEUR ABSOLUE D'UN RÉEL

1) Définition

On appelle « valeur absolue d'un réel x », le réel noté $|x|$ tel que :

$$\begin{cases} \text{si } x \geqslant 0 \text{ alors } |x| = x \\ \text{si } x \leqslant 0 \text{ alors } |x| = -x \end{cases}$$

La valeur absolue permet donc de « rendre positif » un nombre quelconque.

Exemples :

$|5| = 5$

$|-5| = -(-5) = 5$

$|2-5| = -(2-5) = 5-2 = 3$

$|2+5| = 7$

$|4-\pi| = 4-\pi$

$|\pi-4| = -(\pi-4) = 4-\pi$

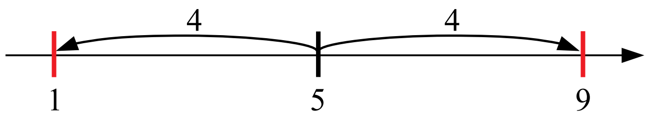
2) Écart entre deux nombres

Cette année, nous utiliserons cette notation pour désigner « la distance entre deux nombres », c'est à dire la différence entre le plus grand et le plus petit de ces deux nombres.

En effet, sur une droite graduée, la distance d entre 2 points d'abscisses x et a est telle que : $\begin{cases} \text{si } x \geqslant a \text{ alors } d = x-a \\ \text{si } x \leqslant a \text{ alors } d = a-x \end{cases}$

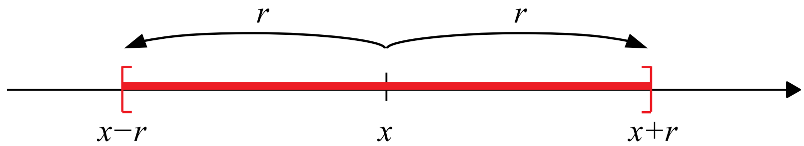
La distance entre 2 réels x et a est donc égale à $|x-a|$ ou encore à $|a-x|$

Application :

Équation ou inéquation	Droite graduée	Solutions
$|x-5| = 4$		$S = \{1 ; 9\}$
$|x| = \sqrt{2}$		
$|x+1| = 4$		
$|x-2| \leqslant 4$		

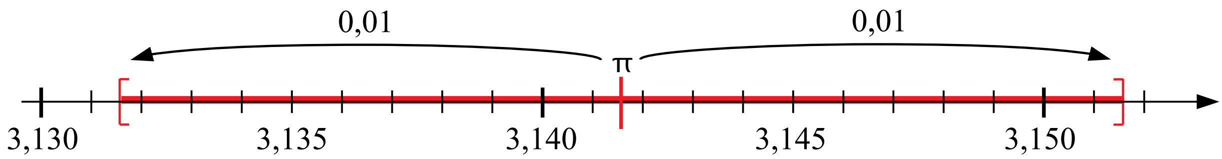
3) Valeurs approchées d'un nombre

Soit r, un réel positif (en général tout petit).
On dit que a est une « valeur approchée » de x à r près lorsque $|x - a| \leqslant r$



Tous les nombres de l'intervalle ci-dessus sont des valeurs approchées possibles de x à r près.
En pratique, on cherche une valeur approchée de x lorsque ce réel a un très grand nombre de décimales et que l'on veut le remplacer par un nombre très proche ayant peu de décimales !

Exemple : Valeurs approchées de π à 10^{-2} près :



3,14 ; 3,15 ; 3,135 ; 3,1416 sont des valeurs approchées de π à 10^{-2} près.
Parmi ces possibilités, on préférera en général 3,14 et 3,15 qui n'ont que 2 décimales. Et on appellera « arrondi de π à 10^{-2} près » celle de ces deux valeurs qui est la plus proche de π, c'est à dire 3,14.

p11: 2
p21: 19
p22: 39
p24: 78, 79, 80
p27: 122
p28: 130, 131, 132
p30: 152, 158
+ feuille 1.3