Classes de 2nde	**Correction du Devoir Surveillé de mathématiques**	Durée : 1h30
Mardi 19 septembre 2017		Pas de calculatrice

Exercice 1 : 3 points

Donner le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants :

$A = -\frac{39}{13} = -3$ donc $A \in \mathbb{Z}$

$B = \frac{\sqrt{4}}{25} = \frac{2}{25} = \frac{8}{100}$ donc $B \in \mathbb{D}$

$C = \frac{-4}{28} = -\frac{1}{7}$ donc $C \in \mathbb{Q}$

$D = 1 - \sqrt{5}$, or $\sqrt{5}$ est irrationnel, donc $D \in \mathbb{R}$

$E = \frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{5}}{-\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{29}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{29}{10}$ donc $E \in \mathbb{D}$

$F = \frac{(\pi-7)\pi}{14\pi-2\pi^2} = \frac{(\pi-7)\pi}{2\pi(7-\pi)} = -\frac{1}{2}$ donc $F \in \mathbb{D}$

Exercice 2 : 5 points

Déterminer l'union puis l'intersection des intervalles suivants :

1) $I = [-4\,;3]$ et $J = [-3\,;\,5]$ donc $I \cap J = [-3\,;\,3]$ et $I \cup J = [-4\,;\,5]$
2) $I = [0\,;\,10]$ et $J =]10\,;\,+\infty[$ donc $I \cap J = \emptyset$ et $I \cup J = [0;+\infty[$
3) $I = [-1\,;\,1]$ et $J = \mathbb{R}^{*+}$ donc $I \cap J =]0\,;\,1]$ et $I \cup J = [-1\,;\,+\infty[$
4) $I =]4\,;\,5[$ et $J = [4\,;\,+\infty[$ donc $I \cap J =]4\,;\,5[= I$ et $I \cup J = [4\,;\,+\infty[= J$
5) $I =]-7\,;\,2[\cap \left[-1\,;\,\sqrt{5}\right]$ et $J = \left]-\frac{3}{2}\,;\,0\right] \cup [1\,;\,2]$ donc $I \cap J = [-1\,;\,0] \cup [1\,;\,2[$ et $I \cup J =]-\frac{3}{2}\,;\,2]$

Exercice 3 : 2 points

Simplifier à l'aide d'intervalles :

1) $-2 < x < 1$ et $0 < x < 3 \Leftrightarrow x \in]0\,;1[$
2) $x < 1$ ou $x > -2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
3) $x > -5$ et $x \neq 3 \Leftrightarrow x \in]-5\,;3[\cup]3\,;+\infty[$
4) $x \leq -1$ ou $x > 5 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-1] \cup]5\,;+\infty[$

Exercice 4 : 1 point

Ensemble *E* des réels non nuls différents de -7 et strictement supérieurs à -10 :

$E =]-10\,;-7[\cup]-7\,;0\,[\cup]0\,;+\infty[$

Exercice 5 : (2 points)

Compléter en utilisant les symboles ∈ ; ∉ ; ⊂ ; ⊄

$[3;4] \subset [-2\,;6] \cup]5\,;12]$

$6 \notin [5\,;8] \cap]-\infty\,;4]$

$\sqrt{16} \in \mathbb{R}^*$

$\{-7\} \subset [-8\,;5[$

Exercice 6 : 7 points

Factoriser :

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$A(x) = (3-x)^2 - (x+3)^2$
$A(x) = (3-x+x+3)(3-x-x-3)$
$A(x) = -12x$

$B(x) = (3x+1)(-6x+5) - 1 + 9x^2$
$B(x) = (3x+1)(-6x+5) + (9x^2-1)$
$B(x) = (3x+1)(-6x+5) + (3x-1)(3x+1)$
$B(x) = (3x+1)(-6x+5+3x-1)$
$B(x) = (3x+1)(-3x+4)$

$C(x) = (1-2x)^2 - (2x-1)^3$
$C(x) = (2x-1)^2 - (2x-1)^3$
$C(x) = (2x-1)^2(1-2x+1)$
$C(x) = (2x-1)^2(2-2x)$
$C(x) = 2(2x-1)^2(1-x)$

$D(x) = (3-2x)(x-3) + x^2 - 6x + 9 + (6-2x)(x-1)$
$D(x) = (3-2x)(x-3) + (x-3)^2 - 2(x-3)(x-1)$
$D(x) = (x-3)\big(3-2x+x-3-2(x-1)\big)$
$D(x) = (x-3)(-3x+2))$

Développer :

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$E(x) = (4x+5)^2 - (3-2x)^2$
$E(x) = 16x^2 + 40x + 25 - (9 - 12x + 4x^2)$
$E(x) = 16x^2 + 40x + 25 - 9 + 12x - 4x^2$
$E(x) = 12x^2 + 52x + 16$

$F(x) = 3(2-x) - 5(2x+3) - (2x-7)(3x+1)$
$F(x) = 6 - 3x - 10x - 15 - (6x^2 + 2x - 21x - 7)$
$F(x) = 6 - 3x - 10x - 15 - 6x^2 - 2x + 21x + 7$
$F(x) = -6x^2 + 6x - 2$

$G(x) = \left(5 - \frac{2}{7}x\right)\left(\frac{2}{7}x + 5\right) - \left(\frac{3}{7}x - 2\right)^2$
$G(x) = 25 - \frac{4}{49}x^2 - \left(\frac{9}{49}x^2 - \frac{12}{7}x + 4\right)$
$G(x) = 25 - \frac{4}{49}x^2 - \frac{9}{49}x^2 + \frac{12}{7}x - 4$
$G(x) = -\frac{13}{49}x^2 + \frac{12}{7}x + 21$

2A DS du 24/X/13 2h Corrigé succint

I) Simplifier

$$A = \frac{3 - \frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}}$$

$$A = \frac{\frac{45}{15} - \frac{6}{15} + \frac{20}{15}}{\frac{30}{15} + \frac{12}{15} - \frac{10}{15}}$$

$$A = \frac{\frac{59}{15}}{\frac{32}{15}}$$

$$\boxed{A = \frac{59}{32} = 1{,}84375 \text{ donc } A \in \mathbb{D}}$$

$$B = \sqrt{50} - 3\sqrt{2} - \sqrt{\frac{18}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - \sqrt{\frac{9}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = 2\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = 2\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B = 2\sqrt{2} - \frac{4}{2}\sqrt{2}$$

$$\boxed{B = 0 \text{ donc } B \in \mathbb{N}}$$

$$C = \left(\frac{-4^{-2} \times 8^4 \times 3^{12}}{16^2 \times 90^7 \times 30^{-2}}\right)^3$$

$$C = \left(-\frac{(2^2)^{-2} \times (2^3)^4 \times 3^{12}}{(2^4)^2 \times (2\times3^2\times5)^7 \times (3\times2\times5)^{-2}}\right)^3$$

$$C = \left(-\frac{2^{-4} \times 2^{12} \times \cancel{3^{12}}}{2^8 \times 2^7 \times \cancel{3^{14}} \times 5^7 \times \cancel{3^{-2}} \times 2^{-2} \times 5^{-2}}\right)^3$$

$$C = \left(-\frac{1}{2^5\ 5^5}\right)^3$$

$$C = (-10^{-5})^3$$

$$\boxed{C = -10^{-15} \text{ donc } C \in \mathbb{D}}$$

Pour tout a de $\mathbb{R}^*$:

$$D = \frac{a + \frac{a}{3} - \frac{a}{2}}{2a + \frac{3a}{4} + \frac{a}{3}}$$

$$D = \frac{\frac{12a}{12} + \frac{4a}{12} - \frac{6a}{12}}{\frac{24a}{12} + \frac{9a}{12} + \frac{4a}{12}}$$

$$D = \frac{\frac{10a}{12}}{\frac{37a}{12}}$$

$$\boxed{D = \frac{10}{37} \text{ donc } D \in \mathbb{Q}}$$

II) Factoriser

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$E = x^2 - 22x + 121$$

$$\boxed{E = (x-11)^2}$$

$$F = (x^2 - 16) + (x+4)(5x+7)$$

$$F = (x-4)(x+4) + (x+4)(5x+7)$$

$$F = (x+4)(x - 4 + 5x + 7)$$

$$F = (x+4)(6x+3)$$

$$\boxed{F = 3(x+4)(2x+1)}$$

$$G = (3x-7)^2 - (x+2)^2$$

$$G = (3x - 7 - x - 2)(3x - 7 + x + 2)$$

$$\boxed{G = (2x-9)(4x-5)}$$

$$H = 2x^2 - 7x + 3$$

$$H = 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}\right)$$

$$H = 2\left(\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + \frac{24}{16}\right)$$

$$H = 2\left(\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right)$$

$$H = 2\left(x - \frac{7}{4} - \frac{5}{4}\right)\left(x - \frac{7}{4} + \frac{5}{4}\right)$$

$$\boxed{H = 2(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

III) 1) Développer A(x)

Pour tout x de $\mathbb{R}$: $A(x) = (x^2 - 25) - 2(5-x)(x+6)$

$$A(x) = x^2 - 25 - 2(5x - x^2 + 30 - 6x)$$

$$A(x) = x^2 - 25 - 10x + 2x^2 - 60 + 12x$$

$$\boxed{A(x) = 3x^2 + 2x - 85}$$

2) Factoriser A(x)

Pour tout x de $\mathbb{R}$: $A(x) = (x^2-25) - 2(5-x)(x+6)$

$$A(x) = (x-5)(x+5) + 2(x-5)(x+6)$$

$$A(x) = (x-5)(x + 5 + 2x + 12)$$

$$\boxed{A(x) = (x-5)(3x+17)}$$

3) Calculer

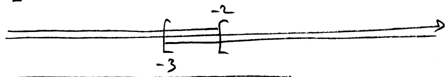
$$A(\sqrt{2}) = 3 \times (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} - 85 = 6 + 2\sqrt{2} - 85 = \boxed{2\sqrt{2} - 79}$$

$$A(5) = (5-5)(3\times5+17) = \boxed{0}$$

$$A(-6) = ((-6)^2 - 25) - 2(5-(-6))(-6+6) = 36 - 25 = \boxed{11}$$

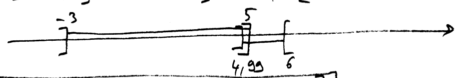
IV) Déterminer $I \cup J$ et $I \cap J$

1) $I =]-\infty ; -2[$ et $J = [-3 ; +\infty[$



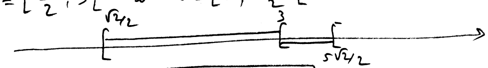
$$\boxed{I \cup J = \mathbb{R} \qquad I \cap J = [-3 ; -2[}$$

2) $I =]-3 ; 5]$ et $J =]4{,}99 ; 6[$



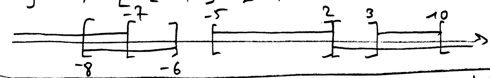
$$\boxed{I \cup J =]-3 ; 6[\qquad I \cap J =]4{,}99 ; 5]}$$

3) $I = [\frac{\sqrt{2}}{2} ; 3[$ et $J = [3 ; \frac{5\sqrt{2}}{2}[$



$$\boxed{I \cup J = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right[\qquad I \cap J = \emptyset}$$

4) $I =]-\infty ; -7[\cup [-5 ; 2] \cup]3 ; 10[$ et $J = [-8 ; -6] \cup [2 ; +\infty[$



$$\boxed{I \cup J =]-\infty ; -6] \cup [-5 ; +\infty[\qquad I \cap J = [-8 ; -7[\cup \{2\} \cup]3 ; 10[}$$

V) Ensemble de définition de f et g

1) $f : x \mapsto \frac{-8}{x^2+9}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 9 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -9$

or un carré ne peut être strictement négatif

donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2) $g : x \mapsto \frac{7}{x} - \frac{\sqrt{1-2x}}{2}$

$x \in D_g \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 1 \geq 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

donc $\boxed{D_g =]-\infty ; 0[\cup]0 ; \frac{1}{2}]}$

VI) 1) Images de −1 et $1+\sqrt{3}$

$$f(-1) = \frac{1 + (-1)^2}{1 - (-1)} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

$$f(1+\sqrt{3}) = \frac{1 + (1+\sqrt{3})^2}{1 - (1+\sqrt{3})} = \frac{1 + 1 + 2\sqrt{3} + 3}{1 - 1 - \sqrt{3}} = \frac{5 + 2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3} + 6}{-3} = \boxed{-\frac{5}{3}\sqrt{3} - 2}$$

2) 2 est-il antécédent de −5 par f ?

Calculons f(2) : $f(2) = \frac{1 + 2^2}{1 - 2} = \frac{5}{-1} = -5$

donc $\boxed{\text{2 est bien un antécédent de } -5 \text{ par } f}$

3) $A(0;1)$ et $B(-1;0)$ appartiennent à C_f ?

Calculons f(0) : $f(0) = \frac{1+0}{1-0} = 1$ donc $\boxed{A(0;1) \in C_f}$

D'après 1) $f(-1) = 1$ donc $\boxed{B(-1;0) \notin C_f}$

4) Tableau de valeurs

x	−7	−5	−3	−1	−0,5	0	0,5	0,7	1,3	1,5	2	2,5	3	5	7	9
$f(x)$	6,3	4,3	2,5	1	0,8	1	2,5	5	−9	−6,5	−5	−4,8	−5	−6,5	−8,3	−10,3