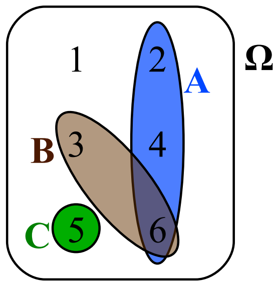
PROBABILITÉS

I) VOCABULAIRE

- Une expérience **aléatoire** est une expérience dont tous les résultats possibles appelés **issues** sont connus à l'avance mais dont on ne sait pas lequel va se produire. L'ensemble des issues possibles est appelé **univers** de l'expérience aléatoire et est souvent noté Ω.
  Ex : On lance un dé. Il y a 6 issues : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

- Tout ensemble d'issues est appelé **événement**.
  Un événement peut être décrit de deux façons : soit par une phrase, soit comme un ensemble d'issues.
  Ex : Appelons A l'événement « Le résultat est pair » :
  $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.
  Appelons B l'événement « Le résultat est multiple de 3 » :
  $B = \{3 ; 6\}$.



- Un événement qui contient une seule issue est dit **élémentaire**.
  Ex : C : « Le résultat est un 5 ». $C = \{5\}$.

- Un événement qui contient toutes les issues est dit **certain**.
  Ex : D : « Le résultat est un nombre positif ». $D = \Omega$.

- Un événement qui ne contient aucune issue est dit **impossible**.
  Ex : E : « Le résultat est un 10 ». $E = \emptyset$.

- On note $A \cup B$ l'événement « Le résultat est un nombre pair **OU** un multiple de 3 » : $A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 6\}$.
  On note $A \cap B$ l'événement « Le résultat est un nombre pair **ET** un multiple de 3 » : $A \cap B = \{6\}$.

- Deux événements qui n'ont pas d'issue en commun sont dits **incompatibles** ou **disjoints**.
  Ex : On ne peut avoir A et C en même temps : $A \cap C = \emptyset$.

- L'événement **contraire** de l'événement A, noté $\overline{A}$ contient tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A : $A \cap \overline{A} = \emptyset$; $A \cup \overline{A} = \Omega$.
  Ex : $\overline{A}$ est l'événement « Le résultat est impair » : $\overline{A} = \{1 ; 3 ; 5\}$.

p348 : 30, 31, 36, 38
p350 : 47, 49, 51

II) PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

1) Loi de probabilité

- La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance que cet événement a d'être réalisé.
- Préciser la loi de probabilité d'une expérience, c'est associer à chaque événement élémentaire sa probabilité.
  Ex : Avec un dé équilibré :

événement	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2) Propriétés générales

- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
  Ex : Avec un dé équilibré et les événements du I)
  $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ donc $p(A) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
- La somme des probabilités des événements élémentaires est toujours égale à 1.
  Ex : $p(\Omega) = p(\{1\}) + p(\{2\}) + ... + p(\{6\}) = 6\times\frac{1}{6} = 1$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
  Ex : $p(A \cup B) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6} = \frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
  Ex : $p(\overline{A}) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

p348 : 32, 33, 34
p349 : 39, 40, 42
p351 : 55, 56
p352 : 61 à 65
p354 : 75, 76
p355 : 80

3) Cas de l'équiprobabilité

- Si les issues sont équiprobables alors : $p(A)=\frac{\text{Nombre d'issues de A}}{\text{Nombre d'issues de }\Omega}$
  Ex : $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ donc $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

III) DANS LES EXERCICES

1) Tableau (+ Attention au choix de l'univers)

Ex : On lance 2 dés tétraédriques (faces de 1 à 4) et on appelle A l'événement « la somme obtenue est 4 ».
1) Écrire l'univers Ω et l'événement A sous forme d'ensembles
2) Calculer p(A)

Solution fausse :
1) $\Omega = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$ et $A = \{4\}$

2) $p(A) = \dfrac{\text{Nombre d'issues de A}}{\text{Nombre d'issues de } \Omega} = \dfrac{1}{7}$ ← faux car les issues ne sont pas équiprobables !

Solution juste :
1) Faisons un tableau :

dé 2 \ dé 1	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

$\Omega = \{(1;1) ; (1;2) ; (1;3) ; ... ; (4;2) ; (4;3) ; (4;4)\}$
et $A = \{(1;3) ; (2;2) ; (3;1)\}$

2) Les issues sont équiprobables
donc $p(A) = \dfrac{\text{Nombre d'issues de A}}{\text{Nombre d'issues de } \Omega} = \dfrac{3}{16}$

p356 : 84, 88
p361 : Bilan2

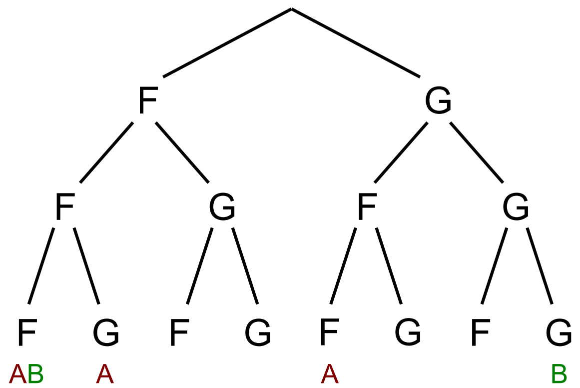
2) Arbre

Ex : On s'intéresse aux familles de 3 enfants.

1) On appelle A l'événement « Il y a au moins 2 filles à la suite ».
   Déterminer p(A).
2) Énoncer $\overline{A}$ à l'aide d'une phrase puis calculer p($\overline{A}$).
3) On appelle B l'événement « Tous les enfants sont du même sexe ».
   Exprimer en fonction de A et de B les événements :
   C : « Il n'y a que des filles » et D : « Il n'y a que des garçons ».

Solution :

1) Faisons un arbre :



Il y a 8 issues en tout dont 3 qui appartiennent à A.

Les issues sont équiprobables donc $p(A)=\dfrac{\text{Nombre d'issues de A}}{\text{Nombre d'issues de }\Omega}=\dfrac{3}{8}$

2) $\overline{A}$ est l'événement « Il n'y a pas 2 filles à la suite ».

$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1-\dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$

3) D'après l'arbre ci-dessus : $C = A \cap B$ et $D = B \cap \overline{A}$

Remarque : Un arbre prend souvent beaucoup plus de place qu'un tableau mais il n'est pas limité à 2 entrées !

p348 : 37
p349 : 44, 45
p350 : 52, 53
p353 : 72
p354 : 78
p355 : 83
p356 : 87, 89, 90, 91

3) Tableau croisé

Ex : Dans un groupe de 450 élèves, 30% des élèves sont en seconde, 64% des élèves sont des filles et 75 filles sont en seconde. Si on tire au sort un élève, quelle est la probabilité d'obtenir un garçon qui ne soit pas en seconde ?

Solution :
Appelons A l'événement : « C'est un garçon qui n'est pas en seconde ».
Faisons un tableau croisé :

	Filles	Garçons	Total
En seconde	75	60	135
Pas en seconde	213	102	315
Total	288	162	450

Les issues sont équiprobables donc :

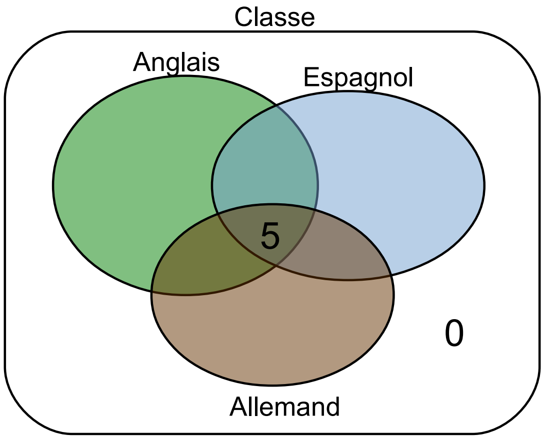
$$p(A)=\frac{\text{Nombre d'issues de A}}{\text{Nombre d'issues de }\Omega}=\frac{102}{450}\approx 0,23$$

p352 : 68, 71
p353 : 73
p354 : 77
p355 : 82

4) Diagramme

Ex : Dans une classe, les élèves ont la possibilité de faire de l'anglais, de l'allemand ou de l'espagnol. Ils étudient tous au moins une langue. En tout, 20 font de l'anglais, 15 de l'allemand et 18 de l'espagnol. Parmi eux, 7 font à la fois de l'anglais et de l'allemand, 8 de l'anglais et de l'espagnol et 9 de l'allemand et de l'espagnol. Enfin 5 élèves étudient les 3 langues.
Si l'on choisit un élève au hasard, quelle est la probabilité qu'il fasse de l'anglais ?

Solution :
Appelons A l'événement « l'élève fait de l'anglais ».
Faisons un diagramme :



Le nombre total d'élèves est donc : 10 + 2 + 5 + 3 + 6 + 4 + 4 + 0 = 34
Le nombre d'élèves faisant de l'anglais est : 10 + 2 + 5 + 3 = 20
Les issues sont équiprobables donc :

$$p(A)=\frac{\text{Nombre d'issues de A}}{\text{Nombre d'issues de } \Omega}=\frac{20}{34}\approx 0,59$$

p350 : 50