2D DS du 21V19 2h corrigé succint

I) Comparer $\frac{1}{\sqrt5-2}$ et $\frac{1}{\sqrt5-1}$:

On a $\sqrt5 > 2$

donc $0 < \sqrt5-2 < \sqrt5-1$

or la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt5-2} > \frac{1}{\sqrt5-1}}$

Comparer $-4(1-\sqrt2)^2+3$ et $-4(1-\sqrt3)^2+3$

On a $1 < \sqrt2 < \sqrt3$

donc $-1 > -\sqrt2 > -\sqrt3$

donc $0 > 1-\sqrt2 > 1-\sqrt3$

or la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

donc $0 < (1-\sqrt2)^2 < (1-\sqrt3)^2$

donc $0 > -4(1-\sqrt2)^2 > -4(1-\sqrt3)^2$

donc $\boxed{-4(1-\sqrt2)^2+3 > -4(1-\sqrt3)^2+3}$

II) Résoudre (E) : $\frac{5x+3}{4x-1} = \frac{5x-3}{4x+1}$

condition : $\begin{cases} 4x-1 \neq 0 \\ 4x+1 \neq 0 \end{cases} \iff x \neq \frac14$ et $x \neq -\frac14$

(E) $\iff (5x+3)(4x+1) = (5x-3)(4x-1)$ et $x \neq \frac14$ et $x \neq -\frac14$

(E) $\iff \cancel{20x^2}+17x+\cancel{3} = \cancel{20x^2}-17x+\cancel{3}$ et $x \neq \frac14$ et $x \neq -\frac14$

(E) $\iff 34x = 0$ et $x \neq \frac14$ et $x \neq -\frac14$

(E) $\iff x = 0$ et $x \neq \frac14$ et $x \neq -\frac14$

$\boxed{\mathcal{S} = \{0\}}$

Résoudre (I) : $1 \leq \frac{3x-4}{x+5} \leq 2$

condition : $x+5 \neq 0 \iff x \neq -5$

Résolvons (I_1) : $1 \leq \frac{3x-4}{x+5}$

$(I_1) \iff \frac{x+5-3x+4}{x+5} \leq 0$ et $x \neq -5$

$(I_1) \iff \frac{-2x+9}{x+5} \leq 0$ et $x \neq -5$

x	$-\infty$		-5		$9/2$		$+\infty$
$-2x+9$		+		+	0	−	
$x+5$		−	0	+		+	
Q		−	‖	+	0	−	

$\mathcal{S}_1 =]-\infty ; -5[\cup [\frac92 ; +\infty[$

Résolvons (I_2) : $\frac{3x-4}{x+5} \leq 2$

$(I_2) \iff \frac{3x-4-2x-10}{x+5} \leq 0$ et $x \neq -5$

$(I_2) \iff \frac{x-14}{x+5} \leq 0$ et $x \neq -5$

x	$-\infty$		-5		14		$+\infty$
$x-14$		−		−	0	+	
$x+5$		−	0	+		+	
Q		+	‖	−	0	+	

$\mathcal{S}_2 =]-5 ; 14]$

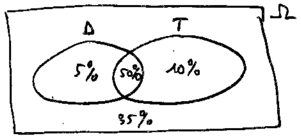
Bilan $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = [\frac92 ; 14]}$

III) Enquête à Versailles

1) $\boxed{A = \overline{T} \quad ; \quad B = D \cup T \quad ; \quad C = \overline{D} \cap \overline{T} = \overline{B}}$

2) **Probabilité de A, B et C**

Faisons un diagramme de Venn :



La personne est interrogée au hasard. Il y a donc équiprobabilité

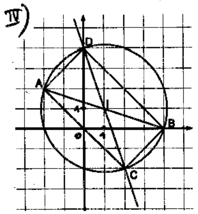
donc $p(T) = \frac{\text{nbre de cas favorables à } T}{\text{nbre total de cas}} = \frac{60}{100} = 0,6$

D'après 1) $A = \overline{T}$ donc $p(A) = 1 - p(T) = 1 - 0,6 = \boxed{0,4}$

$B = D \cup T$ donc $p(B) = p(D \cup T) = \frac{5}{100} + \frac{50}{100} + \frac{10}{100} = \boxed{0,65}$

$C = \overline{B}$ donc $p(C) = 1 - p(B) = \boxed{0,35}$

IV)



2) **Coordonnées de I**

par ⓗ I est le milieu de [AB]

donc $x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$

et $y_I = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$

$\boxed{I(1;1)}$

3) **Coordonnées de D**

Par ⓗ $D \in (Oy)$ donc $x_D = 0$

On a $C(2;-2)$ et $I(1;1)$ donc $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

On a $C(2;-2)$ et $D(0;y_D)$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\y_D+2\end{pmatrix}$

Par ⓗ $D \in (CI)$ donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\y_D+2\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

donc $-6 + y_D + 2 = 0$

donc $y_D = 4$

Bilan $\boxed{D(0;4)}$

4) **Appartenance de D au cercle de diamètre [AB]**

Appelons $\mathcal{C}$ ce cercle

par ⓗ I est le milieu de [AB] donc $\mathcal{C}$ a pour centre I et pour rayon IA.

On est dans un repère orthonormé donc

$IA = \sqrt{(x_A-x_I)^2+(y_A-y_I)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$ID = \sqrt{(x_D-x_I)^2+(y_D-y_I)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

donc $ID = IA$

donc D appartient au cercle de centre I et de rayon IA

donc $\boxed{D \in \mathcal{C}}$

5) **Nature de ACBD**

On a : $A(-2;2)$ et $D(0;4)$ donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$C(2;-2)$ et $B(4;0)$ donc $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$

donc ACBD est un parallélogramme

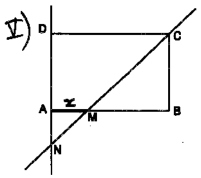
de plus d'après 4) D appartient au cercle de diamètre [AB]

donc le triangle ADB est rectangle en B

donc le parallélogramme ACBD a un angle droit

donc $\boxed{\text{ACBD est un rectangle}}$

V)



2) **AN en fonction de x**

par ⓗ $M \in [AB[$

donc $AA \leq AM < AB$

donc $0 \leq x < 8$

donc $\boxed{x \in [0;8[}$

Dans le triangle DCN, les points N, A et D sont alignés ainsi que N, M et C.

Par ⓗ ABCD est un rectangle donc : (AM) // (DC)

donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{AN}{DN} = \frac{AM}{DC}$

or $A \in [ND]$ donc $DN = DA + AN$

donc $\frac{AN}{DA+AN} = \frac{AM}{DC}$

donc $\frac{AN}{5+AN} = \frac{x}{8}$

donc $8AN = 5x + x AN$

donc $(8-x)AN = 5x$

donc $\boxed{AN = \frac{5x}{8-x}}$

3) **Montrer que $f(x) = AN$**

Par ⓗ pour tout x de $[0;8[$,

$\boxed{f(x) = \frac{40}{8-x} - 5 = \frac{40-5(8-x)}{8-x} = \frac{5x}{8-x} = AN}$

4) **Variation de f sur [0;8[**

Pour tous x_1, x_2 tels que $0 \leq x_1 < x_2 < 8$

on a : $0 \geq -x_1 > -x_2 > -8$

donc $8 \geq 8-x_1 > 8-x_2 > 0$

la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

donc $\frac18 \leq \frac{1}{8-x_1} < \frac{1}{8-x_2}$

donc $\frac{40}{8-x_1} < \frac{40}{8-x_2}$

donc $\frac{40}{8-x_1} - 5 < \frac{40}{8-x_2} - 5$

donc $f(x_1) < f(x_2)$

Bilan : $\boxed{\text{f est strictement croissante sur } [0;8[}$

5) **Si AM > 4**

On a $8 > AM > 4$

donc $8 > x > 4$

or f est strictement croissante sur [0;8[

donc $f(x) > f(4)$

donc $\boxed{AN > 5}$

6) **AN ⩾ 2019 ?**

En traçant f sur la calculatrice, on remarque que plus x se rapproche de 8, plus f(x) devient grand.

Calculons par exemple f(7,99) :

$f(7,99) = \frac{5 \times 7,99}{8-7,99} = \frac{39,95}{0,01} = 3995$

Bilan : si AM = 7,99 alors AN = 3995

$\boxed{\text{le cas } AN \geqslant 2019 \text{ est donc possible}}$

Classes de 2nde	**Corrigé de la Composition n°2 de mathématiques**	Jeudi 23 mars 2017
Calculatrice autorisée		Durée : 3h00

Exercice 1 :

Partie A :

f est une fonction définie sur l'intervalle [2 ; 3] dont voici le tableau de variation :

x	–2	1	3
variations de f	–1 ↗	2	↘ 0

1. Pour tout nombre réel x de [2 ; 3] , $f(x) \geq 0$	F
2. Pour tout nombre réel x de [2 ; 3] , $f(x) \leq 3$	V
3. Il existe un nombre réel x de [2 ; 3] tel que $f(x) < 0$	V
4. Il existe un nombre réel x de [2 ; 3] tel que $f(x) =$ 2	F
5. Pour tout nombre réel x de [2 ; 3], il existe un nombre réel x' de [2 ; 3] tel que $f(x') > f(x)$	F

Partie B :

6. Si f est croissante sur [0 ; 2], alors f est croissante sur [0 ; 1]	V
7. Si f est décroissante sur [0 ; 2] , alors $f(0{,}5) \geq f(0{,}6)$	V
8. Si $f(0) < f(1)$, alors f est croissante sur [0 ; 1]	F
9. Si f admet un maximum en 1 sur [0; 1] , alors f est croissante sur [0; 1]	F
10. Si f n'est pas croissante sur [0; 1] , alors f est décroissante sur [0; 1]	F

Exercice 2 (9 points) : On considère les fonctions $f : x \quad x^2 + 6x \quad 5$ et $g : x \quad 1 + \frac{4}{x-1}$.

1. Ensembles de définition D_f et D_g :

Pas de valeur interdite pour $f(x)$ donc $D_f =$

$D_g = \{x \in \quad / \ x \quad 1 \neq 0\} = \quad \{1\}$

2. Montrer que f atteint un maximum de 4 sur .

Pour tout x de , déterminons le signe de $f(x) \quad f(3)$:

$f(x) \quad f(3) = \quad x^2 + 6x \quad 5 \quad (\quad 3^2 + 6 \times 3 \quad 5) = \quad x^2 + 6x \quad 9 = \quad (x \quad 3)^2$.

Un carré étant toujours positif ou nul : $f(x) \quad f(3) \leq 0$ donc $f(x) \leq f(3)$ avec $f(3) = 4$

Donc f admet un maximum de 4 atteint en 3 sur

3. a.

Variations de f sur] ∞; 3].

Soit a et b deux réels tels que $a < b \leq 3$. Etudions le signe de $f(a) \quad f(b)$:

$f(a) \quad f(b) = \quad a^2 + 6a \quad 5 + b^2 \quad 6b + 5 = (a + b)(b \quad a) \quad 6(b \quad a) = (b \quad a)(a + b \quad 6)$

Par hypothèse : $a < b \Rightarrow b \quad a > 0$

$a < 3$ et $b \leq 3 \Rightarrow a + b < 6 \Rightarrow a + b \quad 6 < 0$

donc $f(a) \quad f(b) < 0$ donc $f(a) < f(b)$ donc f est strictement croissante sur] ∞, 3]

Variations de f sur [3; +∞[.

Pour tous réels a et b tels que $3 \leq a < b$, étudions le signe de $f(a) \quad f(b)$:

$f(a) \quad f(b) = (b \quad a)(a + b \quad 6)$

Par hypothèse : $a < b \Rightarrow b \quad a > 0$

$a \geq 3$ et $b > 3 \Rightarrow a + b > 6 \Rightarrow a + b \quad 6 > 0$

donc $f(a) \quad f(b) > 0$ donc $f(a) > f(b)$ donc f est strictement décroissante sur [3, +∞[

b. Tableau de variations de f sur .

x	∞	3	+∞
f	↗	4	↘

4. Vérifier que, pour tout x de , $f(x) = \quad (x \quad 5)(x \quad 1)$.

Pour tout x de , développons l'expression : $(x \quad 5)(x \quad 1) = \quad x^2 + 6x \quad 5 = f(x)$

5. Signe de $f(x)$.

x	∞		1		5		+∞
$x \quad 5$		–		–	0	+	
$x \quad 1$		–	0	+		+	
1		–		–		–	
$f(x)$		–	0	+	0	–	

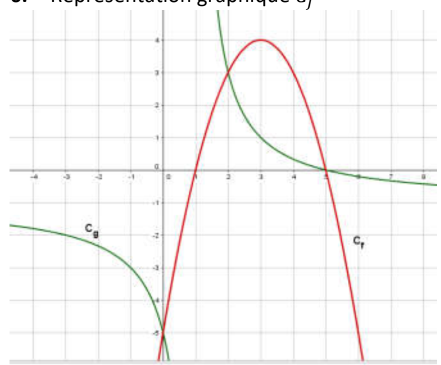
Bilan :

$f(x)$ est strictement positif sur]1 ; 5[et C_f est au-dessus de l'axe des abscisses

$f(x)$ est strictement négatif sur] ∞; 1[et sur]5; +∞[et C_f est en-dessous de l'axe des abscisses

$f(x)$ est nul en $x = 1$ et $x = 5$ et C_f croise l'axe des abscisses

6. Représentation graphique C_f



7. a. Variations de g sur] ∞; 1[.

Pour tous réels a et b tels que $a < b < 1$, étudions le signe de $g(a) \quad g(b)$:

$$g(a) \quad g(b) = \quad 1 + \frac{4}{a \quad 1} + 1 \quad \frac{4}{b \quad 1} = \frac{4(b \quad 1) \quad 4(a \quad 1)}{(a \quad 1)(b \quad 1)} = \frac{4(b \quad a)}{(a \quad 1)(b \quad 1)}$$

Par hypothèses :

$a < b \Rightarrow b \quad a > 0$

$a < 1 \Rightarrow a \quad 1 < 0$ et $b < 1 \Rightarrow b \quad 1 < 0$

Bilan : $g(a) \quad g(b) > 0$ donc $g(a) > g(b)$ donc g est strictement décroissante sur] ∞; 1[

b. Tableau de variations de g sur D_g.

x	∞	1	+∞
g	↘	‖	↘

8. Résoudre par le calcul : (E) : $f(x) = g(x)$.

$(\text{E}) \Leftrightarrow \quad (x \quad 5)(x \quad 1) = \quad 1 + \frac{4}{x \quad 1}$ et $x \neq 1$

$(\text{E}) \Leftrightarrow \quad (x \quad 5)(x \quad 1) = \frac{x+5}{x \quad 1}$ et $x \neq 1$

$(\text{E}) \Leftrightarrow \frac{(x \quad 5)(x \quad 1)^2 + (x \quad 5)}{x \quad 1} = 0$ et $x \neq 1$

$(\text{E}) \Leftrightarrow \quad (x \quad 5)(x \quad 1)^2 + (x \quad 5) = 0$ et $x \neq 1$

$(\text{E}) \Leftrightarrow (x \quad 5)[\ (x \quad 1)^2 + 1] = 0$ et $x \neq 1$

$(\text{E}) \Leftrightarrow (x \quad 5)[x(2 \quad x)] = 0$ et $x \neq 1$

$(\text{E}) \Leftrightarrow x(x \quad 5)(2 \quad x) = 0$ et $x \neq 1$

$(\text{E}) \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = 0$ ou $x = 2$

$S = \{0\,;\,2\,;\,5\}$

Graphiquement cela signifie que les courbes représentatives de *f* et *g* ont 3 points d'intersections ayant pour abscisses respectives, 0, 2 et 5.

9. Résoudre par le calcul $f(x) \geq g(x)$ sur D_g.

$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \frac{x(x \quad 5)(2 \quad x)}{x \quad 1} \geq 0$ et $x \neq 1$

x	∞		0		1		2		5		$+\infty$
x		–	0	+		+		+		+	
$x \quad 5$		–		–		–		–	0	+	
$x \quad 1$		–		–	0	+		+		+	
$2 \quad x$		+		+		+	0	–		–	
$\frac{x(x-5)(-x+2)}{x-1}$		–	0	+	‖	–	0	+	0	–	

$S = [0; 1[\ \cup\ [2; 5]$.

Graphiquement cela signifie que la courbe représentatives de *f* se situe au-dessus de celle de *g* sur les intervalles [0 ; 1[et [2 ; 5]

Exercice 3 (2,5 points) :

1. Traduire à l'aide des notations d'ensemble et de logique chacun des évènements suivants :

$$C = A \cap B \qquad D = \overline{A} \qquad E = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

2. a. Définir l'événement $A \cap \overline{B}$ par une phrase : « la souris ne présente que la maladie A »

b. L'événement « La souris présente la maladie A mais pas la maladie B » est-il inclus dans $\overline{B}$? Oui

3. La probabilité qu'une souris n'ait pas la maladie A est 0,7, donc $P(\overline{A}) = 0{,}7$ et $P(\text{A}) = 1 \quad P(\overline{A}) = 0{,}3$

La probabilité qu'une souris ait la maladie A ou la maladie B est 0,7 donc $P(A \cup B) = 0{,}7$

La probabilité qu'une souris ait la maladie A et la maladie B est 0,2 donc $P(A \cap B) = 0{,}2$

Or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad P(A \cap B)$

donc $0{,}7 = 0{,}3 + P(B) \quad 0{,}2$

donc $P(B) = 0{,}6$ donc $P(\overline{B}) = 1 \quad P(\text{B}) = 0{,}4$

Exercice 4 (2 points) :

1. Que représentent les variables F et S dans cet algorithme ?

F représente la valeur obtenue lors du dernier lancé de dé

et S représente la somme des lancés de dés.

2. Déterminer un univers de l'expérience

$\Omega = \{(1;1;1);(1;1;2);(1;1;3);(1;1;4);(1;1;5);(1;1;6);(1;2;1);(1;2;2);\ldots(6;6;4);(6;6;5);(6;6;6)\}$

Les issues sont équiprobables et il y en a $6 \times 6 \times 6 = 216$

Calculer p(A) :

L'événement A correspond à une seule issue : (1 ;1 ;1) et il y a équiprobabilité donc :

$P(\text{A}) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{1}{216}$

Exercice 5 (4 points) :

1. Justifier que $(A; \overline{AB}, \overline{AC})$ est un repère du plan.

ABC étant un triangle non aplati, les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Ils forment donc bien avec le point A un repère du plan.

2. a. Coordonnées des points A, B, C et I dans ce repère.

A étant l'origine du repère, $A(0{,}0)$.

$\overline{AB} = 1\,\overline{AB} + 0\,\overline{AC}$ d'où $B(1{,}0)$

$\overline{AC} = 0\,\overline{AB} + 1\,\overline{AC}$ d'où $C(0{,}1)$

I est le milieu de $[BC]$ donc $x_I = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_I = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{1}{2}$ d'où $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b. Coordonnées des points M et N en fonction de m, pour $m \in$.

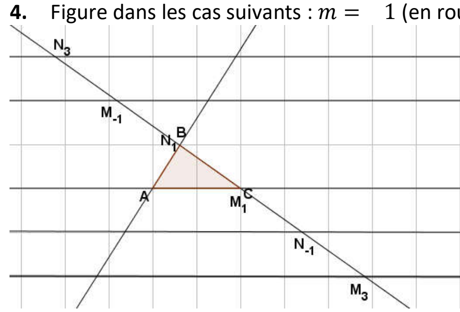
Par hypothèses, $\overline{AM} = (1 \quad m)\overline{AB} + m\overline{AC}$ et $\overline{AN} = m\overline{AB} + (1 \quad m)\overline{AC}$

donc : $M(1 \quad m, m)$ et $N(m, 1 \quad m)$

3. Si $m = 1$, où sont les points M et N ?

Si $m = 1$, $M(0{,}1)$ donc M est confondu avec C et $\text{N}(1{,}0)$ donc N est confondu avec B.

4. Figure dans les cas suivants : $m = \quad 1$ (en rouge) puis $m = 3$ (en vert).



5. Montrer que, pour tout m de , $\overline{BM}$ est colinéaire à $\overline{BC}$. Que peut-on en déduire ?

Pour tout m de , on a par hypothèses : $\overline{AM} = (1 \quad m)\overline{AB} + m\overline{AC}$

donc : $\overline{BM} = \overline{BA} + \overline{AM} = \quad \overline{AB} + (1 \quad m)\overline{AB} + m\overline{AC} = \quad m\overline{AB} + m\overline{AC} = m(\overline{BA} + \overline{AC}) = m\overline{BC}$

donc $\overline{BM}$ est toujours colinéaire à $\overline{BC}$.

On en déduit que M est toujours aligné avec B et C.

6. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles M et N sont confondus.

D'après 2)b, on a : $M(1 \quad m, m)$ et $N(m, 1 \quad m)$

donc : M et N confondus $\Leftrightarrow x_M = x_N$ et $y_M = y_N \Leftrightarrow 1 \quad m = m \Leftrightarrow 1 = 2m \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

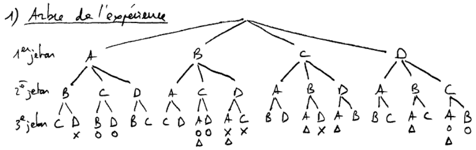
7. Montrer que, pour tout m de , I est le milieu de [MN].

Calculons les coordonnées du milieu Ω de [MN] : $x_\Omega = \frac{x_M+x_N}{2} = \frac{1-m+m}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad y_\Omega = \frac{y_M+y_N}{2} = \frac{m+1-m}{2} = \frac{1}{2}$

Ω et I ayant les mêmes coordonnées, I est bien le milieu de [MN].

2A DS du 26V15 2h Corrigé succinct

I) 1) <u>Arbre de l'expérience</u>



Il y a 24 issues <u>équiprobables</u>

2) Appelons E_1 l'événement "Obtenir à la suite B puis D".
Il y a 4 résultats possibles signalés par ×

$$p(E_1) = \frac{\text{nbre d'issues de } E_1}{\text{nbre total d'issues}} = \frac{4}{24} = \boxed{\frac{1}{6}} \approx 0{,}17$$

3) Appelons E_2 l'événement "Obtenir C en deuxième position".
Il y a 6 résultats possibles signalés par o

$$p(E_2) = \frac{6}{24} = \boxed{\frac{1}{4}} = 0{,}25$$

4) Appelons E_3 l'événement "le jeton restant est A".
Il y a 6 résultats possibles signalés par Δ

$$p(E_3) = \frac{6}{24} = \boxed{\frac{1}{4}} = 0{,}25$$

II) <u>Probabilité que les deux guichets soient ouverts</u>

cette probabilité est $p(A \cap B)$.
On sait qu'il y a toujours au moins un guichet ouvert
donc $p(A \cup B) = 1$

or $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
donc $1 = 0{,}73 + 0{,}54 - p(A \cap B)$
donc $p(A \cap B) = 0{,}73 + 0{,}54 - 1 = 0{,}27$

$\boxed{\text{la probabilité que les deux guichets soient ouverts est } 0{,}27}$

III) 1) <u>Extremum de f en -1</u>

Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x) - f(-1)$

$f(x) - f(-1) = 8 - 2(x+1)^2 - 8 + 2 \times 0^2 = -2(x+1)^2$

or un carré est toujours positif ou nul
donc $-2(x+1)^2 \leqslant 0$ donc $f(x) - f(-1) \leqslant 0$
donc $f(x) \leqslant f(-1)$ avec $f(-1) = 8$
donc $\boxed{f \text{ admet un maximum de } 8 \text{ en } -1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

2) <u>Signe de g</u>

Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$g(x) = 8 - \frac{2}{x+1} = \frac{8(x+1) - 2}{x+1} = \frac{8x+6}{x+1} = \frac{2(4x+3)}{x+1}$$

Faisons un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		$-3/4$		$+\infty$
$4x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

<u>Bilan :</u>

Si $x \in]-\infty ; -1[\cup]-\frac{3}{4} ; +\infty[$,
alors $\boxed{g \text{ est strictement positive et } C_g \text{ est au dessus de } (Ox)}$

Si $x \in]-1 ; -\frac{3}{4}[$
alors $\boxed{g \text{ est strictement négative et } C_g \text{ est en dessous de } (Ox)}$

Si $x = -\frac{3}{4}$ alors $\boxed{g \text{ est nulle et } C_g \text{ coupe l'axe } (Ox)}$

3) <u>Variations de f sur $]-\infty ; -1]$</u>

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 \leqslant -1$
étudions le signe de $f(x_1) - f(x_2)$:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= 8 - 2(x_1+1)^2 - 8 + 2(x_2+1)^2 \\ &= 2\left[(x_2+1)^2 - (x_1+1)^2\right] \\ &= 2(x_2+1+x_1+1)(x_2+1-x_1-1) \\ &= 2(x_1+x_2+2)(x_2-x_1) \end{aligned}$$

Or par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_2 - x_1 > 0$
$x_1 < -1$ et $x_2 \leqslant -1$ donc $x_1 + x_2 < -2$
donc $x_1 + x_2 + 2 < 0$

Bilan : $f(x_1) - f(x_2) < 0$ donc $f(x_1) < f(x_2)$
donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty ; -1]}$

<u>Variations de f sur $[-1 ; +\infty[$</u>

Pour tous x_1, x_2 tels que $-1 \leqslant x_1 < x_2$
on a $f(x_1) - f(x_2) = 2(x_1+x_2+2)(x_2-x_1)$

Or par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_2 - x_1 > 0$
$x_1 \geqslant -1$ et $x_2 > -1$ donc $x_1 + x_2 > -2$
donc $x_1 + x_2 + 2 > 0$

Bilan : $f(x_1) - f(x_2) > 0$ donc $f(x_1) > f(x_2)$
donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [-1 ; +\infty[}$

<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f		↗	8	↘	

4) <u>Variations de g sur $]-\infty ; -1[$</u>

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 < -1$
on a $x_1 + 1 < x_2 + 1 < 0$
or la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$

donc $\dfrac{1}{x_1+1} > \dfrac{1}{x_2+1}$

or la fonction affine $x \mapsto 8 - 2x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

donc $8 - \dfrac{2}{x_1+1} < 8 - \dfrac{2}{x_2+1}$

donc $g(x_1) < g(x_2)$

Bilan, $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]-\infty ; -1[}$

<u>Variations de g sur $]-1 ; +\infty[$</u>

Pour tous x_1, x_2 tels que $-1 < x_1 < x_2$
on a : $0 < x_1 + 1 < x_2 + 1$
or la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

donc $\dfrac{1}{x_1+1} > \dfrac{1}{x_2+1}$

or la fonction affine $x \mapsto 8 - 2x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

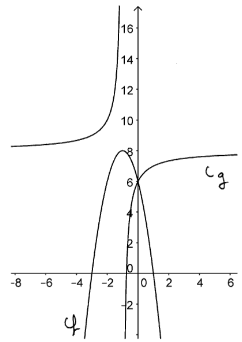
donc $8 - \dfrac{2}{x_1+1} < 8 - \dfrac{2}{x_2+1}$

donc $g(x_1) < g(x_2)$

Bilan, $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]-1 ; +\infty[}$

<u>Tableau de variation</u>

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g		↗	‖	↗	



6) <u>Intersections de C_f avec (Ox)</u>

Résolvons l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 8 - 2(x+1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - (x+1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2 - x - 1)(2 + x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-x)(x+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -3 \end{aligned}$$

Donc $M(x ; y) \in C_f \cap (Ox) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$

C_f a donc deux points d'intersections avec (Ox) : $\boxed{A(1;0) \text{ et } B(-3;0)}$

<u>Intersection de C_f avec (Oy)</u>

$M(x ; y) \in C_f \cap (Oy) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \\ x \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$

C_f a donc un point d'intersection avec (Oy) : $\boxed{C(0;6)}$

7) <u>Positions relatives de C_f et C_g</u>

$D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, étudions le signe de $f(x) - g(x)$

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 8 - 2(x+1)^2 - 8 + \frac{2}{x+1} \\ &= 2\left[\frac{1}{x+1} - (x+1)^2\right] \\ &= 2\left[\frac{1 - (x+1)^3}{x+1}\right] \\ &= 2\left[\frac{(1 - (x+1))(1^2 + (x+1) + (x+1)^2)}{x+1}\right] \\ &= \frac{-2x(x + 2 + x^2 + 2x + 1)}{x+1} \\ &= \frac{-2x(x^2 + 3x + 3)}{x+1} \\ &= \frac{-2x\left[(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{12}{4}\right]}{x+1} \\ &= \frac{-2x\left[(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}\right]}{x+1} \end{aligned}$$

<u>Tableau de signe</u>

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+\frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$		$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x) - g(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

<u>Bilan</u>

Si $x \in]-\infty ; -1[$ ou si $x \in]0 ; +\infty[$,
alors $f(x) - g(x) < 0$ donc $f(x) < g(x)$
donc $\boxed{C_f \text{ est située en dessous de } C_g}$

Si $x \in]-1 ; 0[$,
alors $f(x) - g(x) > 0$ donc $f(x) > g(x)$
donc $\boxed{C_f \text{ est située au dessus de } C_g}$

Si $x = 0$
alors $f(x) = g(x)$
et $\boxed{C_f \text{ coupe } C_g}$

2C Composition du 16V11 3h Corrigé succinct

I) 1)

	graines jaunes	graines vertes	Total
graines lisses	3057	1021	4078
graines ridées	1012	341	1353
Total	4069	1362	5 431

2) Il y a équiprobabilité donc $p(A) = \frac{\text{nbre de cas favorables à } A}{\text{nbre total de cas}} = \boxed{\frac{4069}{5431} \approx 0,75}$ De même $p(B) = \boxed{\frac{4078}{5431} \approx 0,75}$

3) $A \cap B$ est l'événement "la graine est jaune ET lisse" donc $p(A \cap B) = \boxed{\frac{3057}{5431} \approx 0,56}$

$A \cup B$ est l'événement "la graine est jaune OU lisse" donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \boxed{\frac{5090}{5431} \approx 0,94}$

$\bar{A}$ est l'événement "la graine n'est pas jaune" ou encore "elle est verte" $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \boxed{\frac{1362}{5431} \approx 0,25}$

$\bar{A} \cap \bar{B}$ est l'événement "la graine n'est ni jaune, ni lisse" ou encore "elle est verte et ridée"

donc $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - p(A \cup B) = \boxed{\frac{341}{5431} \approx 0,06}$

4) Il y a toujours équiprobabilité : $p(C) = \boxed{\frac{1012}{4069} \approx 0,25}$

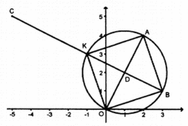
II) Le nombre de personnes interrogées après les travaux est $n = 500$

Parmi ces personnes, la fréquence de celles qui habitent hors du département est $f = \frac{172}{500} = 0,344$ 0,344

Appelons p cette même fréquence parmi tous les skieurs de la saison qui suit les travaux.

Ici $n > 25$ et $f \in [0,2 ; 0,8]$. Déterminons l'intervalle de confiance de p : $f - \frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0,30$ et $f + \frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0,39$

Il y a donc 95% de chances qu'après les travaux la fréquence des skieurs hors département soit entre 0,30 et 0,39. Avant les travaux cette fréquence était de 0,25. Le pourcentage des skieurs hors département a donc très probablement augmenté et cette augmentation est peut-être due aux travaux

III) 

1) Montrer que : $(DA) \perp (DB)$

Le repère est orthonormal donc $DA^2 = (x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 = 5$

De même $DB^2 = (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 = 5$ et $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 10$

On remarque que $DA^2 + DB^2 = 5 + 5 = 10 = AB^2$

Donc d'après la réciproque de Pythagore, le triangle DAB est rectangle en D donc $\boxed{(DA) \perp (DB)}$

2) Montrer que O, A et D sont alignés

On a : $\vec{OA}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{OD}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. On remarque que $\vec{OA} = 2\vec{OD}$ donc $\vec{OA}$ et $\vec{OD}$ colinéaires donc $\boxed{O, A, D \text{ alignés}}$

3) Coordonnées de C

Par (H) $\vec{OC} = 2\vec{OA} - 3\vec{OB}$ donc $\begin{cases} x_C - x_O = 2(x_A - x_O) - 3(x_B - x_O) \\ y_C - y_O = 2(y_A - y_O) - 3(y_B - y_O) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_C = 2x_A - 3x_B = -5 \\ y_C = 2y_A - 3y_B = 5 \end{cases}$ $\boxed{C(-5 ; 5)}$

4) Equation de (OA) : (OA) est non verticale et passe par O. Son éq est de la forme $y = ax$

or $A \in (OA)$ donc $y_A = a x_A$ donc $a = \frac{4}{2} = 2$ donc $\boxed{(OA) : y = 2x}$

Equation de (CB) : Soit $M(x ; y)$ un point quelconque

$M \in (CB) \Leftrightarrow \vec{CM}\begin{pmatrix}x+5\\y-5\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{CB}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix} \Leftrightarrow -4(x+5) - 8(y-5) = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}$

Intersection de (OA) et (CB)

$M(x ; y) \in (OA) \cap (CB) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ $\boxed{\text{On trouve le point } D \,!}$

5) DA = DB = DO

D'après 1) $DA^2 = DB^2 = 5$ or des distances étant toujours positives, on a donc $DA = DB = \sqrt{5}$

De plus $DO = \sqrt{(x_O - x_D)^2 + (y_O - y_D)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ donc $\boxed{DA = DB = DO}$

6) Montrer que $K \in \mathcal{C}(D ; DB)$

Par (H) K est le milieu de [BC] donc $\begin{cases} x_K = \frac{x_B + x_C}{2} = -1 \\ y_K = \frac{y_B + y_C}{2} = 3 \end{cases}$ donc $DK = \sqrt{(x_K - x_D)^2 + (y_K - y_D)^2} = \sqrt{5} = DB$ donc $\boxed{K \in \mathcal{C}(D, DB)}$

Nature de OKAB

- D'après 2) O, A et D sont alignés et d'après 5) DO = DA donc D est le milieu de [OA]
D'après 4) $D \in (BC)$ et par (H) $K \in (BC)$ donc K, D et B sont alignés. De plus d'après 6) DK = DB donc D est le milieu de [KB]
Le quadrilatère OKAB a donc ses diagonales qui se coupent en leur milieu et est un parallélogramme
- D'après 1) $(DA) \perp (DB)$ donc le parallélogramme OKAB a ses diagonales perpendiculaires et est un losange
- D'après 5) DA = DB or D étant le milieu de [OA] et [KB] on a OA = KB
donc le losange OKAB a ses diagonales de même longueur et est $\boxed{\text{un carré}}$

IV) 1) A = 1 et N = 3

i	1	2	3
U	1 → 4	4 → 2	2 → 1

Affichage : 4 2 1

A = 12 et N = 5

i	1	2	3	4	5
U	12 → 6	6 → 3	3 → 10	10 → 5	5 → 16

Affichage : 6 3 10 5 16

2)
```
A=input("donner la valeur de A : ")
N=input("donner la valeur de N : ")
U=A
Umax=U
for i in range(1,N+1):
    if U%2==0:
        U=U/2
    else:
        U=3*U+1
    print U
    if U>Umax:
        Umax=U
print "Valeur maxi de U : ", Umax
```

V) 1) x_1 et x_2 sont les solutions de l'éq $f(x) = 0$, c'est à dire les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses. Posons $\boxed{x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 3}$

2) Calcul de a

D'après 1) On a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = a(x+1)(x-3)$

Or $S(1 ; 6) \in \mathcal{P}$ donc $f(1) = 6$ donc $a(1+1)(1-3) = 6$ donc $\boxed{a = -\frac{3}{2}}$ et $f(x) = -\frac{3}{2}(x+1)(x-3)$

3) Positions relatives de $\mathcal{P}$ et Δ

graphiquement : Δ coupe $\mathcal{P}$ en deux points d'abscisses $-1,75$ et 2.

$\mathcal{P}$ est au dessus de Δ entre ces points et en dessous de Δ à l'extérieur.

algébriquement : Résolvons (I) : $f(x) \geq \frac{21}{8}x - \frac{3}{4}$

$(I) \Leftrightarrow -\frac{3}{2}(x+1)(x-3) \geq \frac{21}{8}x - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -\frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x-2)\left(x + \frac{7}{4}\right) \leq 0$

x	$-\infty$		$-7/4$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+7/4$		$-$	0	$+$		$+$	
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bilan : $\mathcal{P}$ et Δ se coupent en $x = -\frac{7}{4}$ et $x = 2$

$\mathcal{P}$ est strictement au dessus de Δ pour $x \in]-\frac{7}{4} ; 2[$

$\mathcal{P}$ est strictement en dessous de Δ pour $x \in]-\infty ; -\frac{7}{4}[$ et $x \in]2 ; +\infty[$

VI) 1)

Couleur obtenue	Rouge	Bleue	Verte	Jaune
Bénéfice du joueur	−5	0	15	95

2) Bénéfice moyen pour n = 12

Il y a équiprobabilité donc ce bénéfice est : $\frac{-5 \times 12 + 15 \times 3 + 95 \times 1}{12 + 6 + 3 + 1} = \boxed{\frac{40}{11} \approx 3,63}$

3) Bénéfice moyen pour n quelconque : Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, ce bénéfice est : $\frac{-5n + 15 \times 3 + 95 \times 1}{n + 6 + 3 + 1} = \boxed{\frac{-5n + 140}{n + 10}}$

4) Forme réduite : Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $b(x) = \frac{-5x + 140}{x + 10} = \frac{-5(x+10) + 50 + 140}{x + 10} = \boxed{-5 + \frac{190}{x + 10}}$ ($m = -5$ et $p = 190$)

5) Variations de b sur $\mathbb{R}^+$

Pour tous x_1, x_2 tels que $0 \leq x_1 < x_2$

on a : $10 \leq x_1 + 10 < x_2 + 10$

or la fct inverse est st $\searrow$ sur $\mathbb{R}^{*+}$

donc $\frac{1}{x_1 + 10} > \frac{1}{x_2 + 10}$

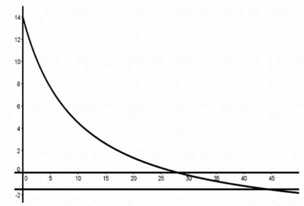
donc $\frac{190}{x_1 + 10} > \frac{190}{x_2 + 10}$

donc $-5 + \frac{190}{x_1 + 10} > -5 + \frac{190}{x_2 + 10}$

donc $\boxed{b \text{ est st. décroissante sur } \mathbb{R}^+}$

Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
b	14 ↘	



7) (a) Pour que le propriétaire gagne en moyenne 1,5 € par partie, les joueurs doivent perdre en moyenne 1,5 € !

(b) Le souhait du propriétaire se traduit par l'inéquation (I) : $b(x) \leq -1,5$

(c) Résolution graphique de (I) : les solutions sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_b$ situés en dessous de la droite d'équation $y = -1,5$ $\boxed{\mathcal{S} = [a ; +\infty[\text{ avec } a \approx 44,3}$

(d) Résolution algébrique de (I) :

(I) : $b(x) \leq -1,5$ et $x \in \mathbb{R}^+$

$(I) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{-3,5x + 155}{x + 10} \leq 0$ et $x \in \mathbb{R}^+$

x	0		310/7		$+\infty$
$-3,5x + 155$		$+$	0	$-$	
$x + 10$		$+$		$+$	
Q		$+$	0	$-$	

$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{310}{7} ; +\infty\right[}$

(e) D'après (c) et (d), on déduit que la roue doit contenir au moins 45 secteurs rouges pour que le propriétaire soit satisfait