RACINES CARRÉES

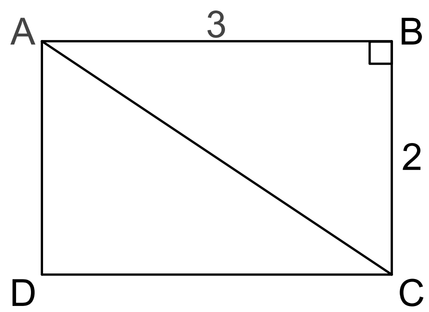
I) RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE POSITIF

1) Rappels

- Le carré d'un nombre est toujours positif :
  $(-5)^2=25$; $(10^{-1})^2=10^{-2}$; $(-10^{-5})^2=10^{-10}$
- Deux nombres opposés ont le même carré :
  $(-5)^2=5^2$; $(-x)^2=(-1\times x)^2=(-1)^2\times x^2=x^2$; $(3-x)^2=(x-3)^2$
- Quelques « carrés parfaits » :
  0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ; 81 ; 100 ; 121 ; 144 ; ...

2) Diagonale d'un rectangle

Ex : Soit ABCD un rectangle tel que :
AB = 3 et BC = 2.



Déterminons AC :

ABCD est un rectangle, donc le triangle ABC est rectangle en B.
Donc, d'après le théorème de Pythagore dans ce triangle :

$AC^2=AB^2+BC^2=3^2+2^2=9+4=13$

AC est donc le nombre <u>positif</u> dont le carré est 13.

Ce nombre est compris entre 3 et 4 car $3^2 = 9$ et $4^2 = 16$
On le note $\sqrt{13}$
D'après la calculatrice $\sqrt{13}\approx 3.605551275$

3) Définition :

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif dont le carré est a. On la note $\sqrt{a}$.

Remarques :

- $\sqrt{0}=0$; $\sqrt{1}=1$; $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{9}=3$; $\sqrt{16}=4$; …
- A savoir par cœur : $\sqrt{2}\approx 1{,}414$ et $\sqrt{3}\approx 1{,}732$
- $\sqrt{-5}$ n'est pas défini car aucun nombre n'a pour carré –5.
- a doit être positif et $\sqrt{a}$ est toujours positif.
- L'équation $x^2=25$ admet deux solutions : $x = 5$ et $x = -5$.
  $\sqrt{25}$ est celle des deux solutions qui est positive.

II) RÈGLES DE CALCUL

1) Racine et carré

- Si $a \geqslant 0$ alors $(\sqrt{a})^2 = a$
- Si $a \geqslant 0$ alors $\sqrt{(a^2)} = a$, mais si $a \leqslant 0$ alors $\sqrt{(a^2)} = -a$
  Ex : $\sqrt{(2^2)} = \sqrt{(4)} = 2$, mais $\sqrt{((-2)^2)} = \sqrt{(4)} = 2$

2) Somme ou différence

- Il n'y a malheureusement aucune règle générale permettant de simplifier $\sqrt{a+b}$ ou $\sqrt{a-b}$!

- En revanche, si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ alors $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$
  Ex : $\sqrt{9+4} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$, et $\sqrt{9} + \sqrt{4} = 3+2 = 5$

Démonstration :

a et b étant positifs, on a :

$(\sqrt{a+b})^2 = a+b$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

or une racine est toujours positive ou nulle donc : $2\sqrt{ab} \geqslant 0$

donc : $(\sqrt{a+b})^2 \leqslant (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$

or des nombres positifs sont dans le même ordre que leurs carrés

donc : $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$

3) Produit

- Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ alors $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
  Ex : $\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$, et $\sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$

Démonstration :
a et *b* étant positifs, on a :
$(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$
$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$
donc : $(\sqrt{a \times b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$
or des nombres positifs qui ont le même carré sont égaux
donc : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

4) Quotient

- Si $a \geqslant 0$ et $b > 0$ alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Démonstration :
a et *b* étant positifs et *b* non nul, on a :
$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$
$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$
donc : $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$
or des nombres positifs qui ont le même carré sont égaux
donc : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

p26 : 103, 105, 108
p28 : 135
p30 : 155

p79 : 28
p80 : 54
p81 : 58
p82 : 79

III) DANS LES EXERCICES

1) Mettre sous la forme $a\sqrt{b}$

Ex : $A=\sqrt{300}=\sqrt{100\times3}=\sqrt{100}\times\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

2) Réduire

Ex : $B=\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{32}+\sqrt{200}$

$B=\sqrt{9\times2}+\sqrt{25\times2}-\sqrt{16\times2}+\sqrt{100\times2}$

$B=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-4\sqrt{2}+10\sqrt{2}$

$B=14\sqrt{2}$

3) Écrire sans racine au dénominateur

Ex : $C=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ex : $D=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-1}=2+\sqrt{2}$

Remarque : Ôter les racines au dénominateur ne simplifie pas toujours l'écriture de l'expression mais permet d'avoir facilement un ordre de grandeur du résultat : $C\approx\dfrac{1,7}{3}\approx0,6$ et $D\approx2+1,4\approx3,4$

p49 : 16, 32, 33

p26 : 104
p28 : 138
p30 : 157, 158

algo
p26 : 109
p93 : TP (Héron)