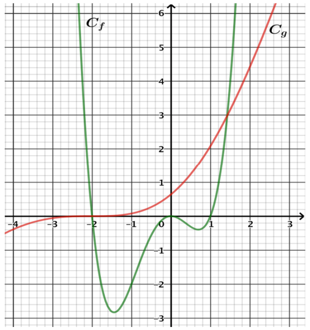
NOM :

Secondes	**DEVOIR SURVEILLE**	11/01/2020
Calculatrice autorisée	**DE MATHEMATIQUES**	2 heures

Exercice 1 (1,5 points)

1) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ représentées ci-contre par les courbes C_f et C_g.
Par lecture graphique, donner **sans justifier et directement sur le sujet** l'ensemble des solutions de :



L'équation (E_1): $f(x) = 0$	
L'équation (E_2): $g(x) = 2$	
L'inéquation (I_1): $f(x) > 0$	
L'inéquation (I_2): $f(x) \leq g(x)$	

2) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-a)^2 + 4$ où a est un nombre réel quelconque.
Pour chacune des propositions ci-dessous, dire, **sans justifier et directement sur le sujet**, si elle est vraie ou fausse.

Pour toute valeur de a, l'équation $h(x) = 0$ a deux solutions.	
Pour toute valeur de a, le point de coordonnées $(3a; 4(1+a^2))$ appartient à la courbe représentative de h.	

Exercice 2 (2,5 points) On détaillera toutes les étapes de calcul

1) Ecrire le dénominateur sans radical puis simplifier : $A = \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} - \sqrt{7}$

2) Simplifier l'expression suivante : $B = \left(\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2$

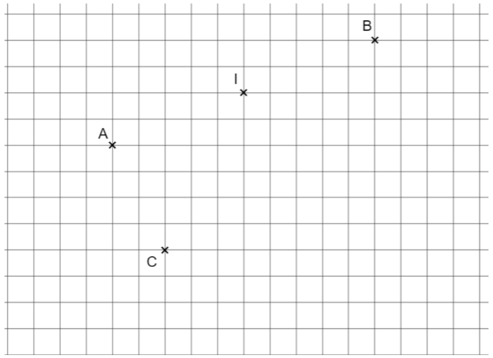
3) En déduire que le triangle EFG dont les longueurs des côtés sont données ci-dessous est rectangle :

$$\mathrm{EF} = \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} - \sqrt{7}\,; \qquad \mathrm{FG} = \sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}}\,; \qquad \mathrm{EG} = \sqrt{\frac{26}{15}}.$$

Exercice 3 (3,5 points)

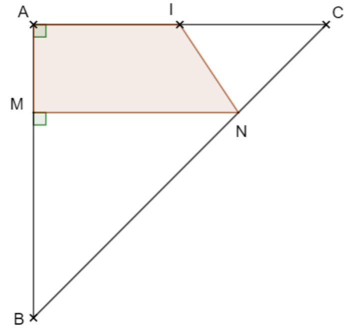
Soit ABC un triangle. Le point I est le milieu de [AB].
Les points J et K sont définis par :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$



1) Placer les points J et K sur la figure ci-contre.
2) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
3) Exprimer $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IK}$
5) Que peut-on en déduire pour le point K ?

Exercice 4 (7,5 points)



Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que AB = 4 cm.
Soit I le milieu du segment [AC].
On considère un point mobile M sur [AB], puis le point N d'intersection du segment [BC] et de la perpendiculaire à (AB) passant par M.
Le quadrilatère AMNI est ainsi un trapèze.

On pose $x = \mathrm{BM}$ en cm.
On note $f(x)$ l'aire du trapèze AMNI en cm².

On rappelle que : Aire d'un trapèze $= \frac{\text{(Grande base+Petite base)×Hauteur}}{2}$

1) Donner sans justifier l'ensemble de définition, noté Df, de la fonction f.
2) Exprimer AM, puis MN, en fonction de x.
3) En déduire que, pour tout x réel de [0;4], $f(x) = \frac{(2+x)(4-x)}{2}$.
4) En utilisant la calculatrice, déterminer graphiquement, en justifiant, pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du trapèze AMNI est égale à 3 cm². On arrondira à 0,1 près.
5) a) Montrer que, pour tout x réel de [0;4], $f(x) = \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2}$.
   b) En déduire la résolution algébrique de l'équation (E) : $f(x) = 3$.

Exercice 5 (3 points)

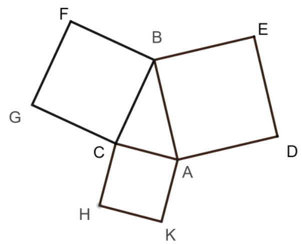
1) a) Calculer les nombres suivants : $A = 1 \times 3 + 1$; $B = 2 \times 4 + 1$; $C = 10 \times 12 + 1$
   b) Que remarquez-vous ?
2) On considère la fonction « mystere » ci-contre écrite en langage Python. Cette fonction calcule la racine carrée de nombres de la forme exposée dans la question 1.
On rappelle que la fonction sqrt de la bibliothèque math calcule la racine carrée d'un nombre positif entré en argument.

```
1  from math import *
2
3  def mystere(n):
4          produit = ____________________
5          somme = produit+1
6          return sqrt(somme)
```

   a) Compléter la ligne 4 **directement sur le sujet.**
   b) Calculer la valeur retournée par cette fonction pour : $n = 4$, $n = 5$, et $n = 15$.
   c) Conjecturer alors la valeur retournée par « mystere(n) » en fonction de l'entier naturel n.
3) Démontrer cette conjecture.

Exercice 6 (2 points)

La figure ci-contre est constituée d'un triangle ABC et de trois carrés ABED, CBFG et ACHK.
Que vaut la somme $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{KD}$? Justifier.



I) 1) Écrire sans radical au dénominateur : $A=\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}-\sqrt{7}$

2) Simplifier l'expression suivante : $B=\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^2$

3) **<u>En déduire</u>** que le triangle EFG dont les dimensions sont données ci-dessous est rectangle.

$EF=\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}-\sqrt{7}$ $FG=\sqrt{\dfrac{5}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ $EG=\sqrt{\dfrac{26}{15}}$

II)Simplifier :

$G=\dfrac{3\sqrt{18}-2\sqrt{2}+\sqrt{50}}{\sqrt{32}+5\sqrt{2}-3\sqrt{8}}$ $H=\sqrt{0{,}1^4}\times\sqrt{500}$ $I=\sqrt{10^2}-\sqrt{(-8)^2}$

$J=\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}-2\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ $K=\left(\dfrac{4}{27}\div\dfrac{2}{3}\right)\div\left(\dfrac{32}{7}\div\dfrac{16}{5}\right)$ $L=\dfrac{15\times(-6)^{-4}}{10^{-2}\times25\times(-12^{-2})}$

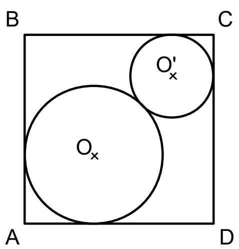
III)Écrire $M=8{,}51515151515\ldots$ sous la forme d'une fraction irréductible.

(Coup de pouce : Intéressez-vous à 100M...)

IV) Factoriser :

$N=3(1-x)^2-27x^2$ $O=0{,}25x^2-x+1$ $P=x^2(x-1)+3x^2-3x+(x-1)(3x+5)$

V)Les deux cercles ci-dessous ont respectivement pour rayons x et y et ils sont à la fois tangents entre eux et tangents au carré $ABCD$. Sachant que $AB = 1$, combien vaut $x + y$? (Justifier rapidement)



BARÈME PROBABLE : I) 4,5pts III) 6,5pts IV) 2,5pts V) 4,5pts VI) 2pts

I) Simplifier :

1) $A=\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$

2) $B=\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}-\frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)}$ (a ≠ b et a ≠ – b)

3) $C=\frac{(\pi\sqrt{3})^7(\pi^2\sqrt{2})^5}{\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^3}$

II) Résoudre dans ℝ :

1) $(E_1): x^2=9$

2) $(E_2): (1-x)^2+3=0$

3) $(E_3): \frac{9x^2-25}{(x+2)(3x+5)}=0$

4) $(E_4): \frac{x}{(x+2)^2}=\frac{2x+3}{x(x+2)}$

III)1) Résoudre : $\frac{1}{1+x}=x$

2) En déduire le calcul de : $A=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}}}}}$

IV) Quels sont les entiers qui ont un nombre impair de diviseurs ?

BAREME PROBABLE : I) 6pts II) 8pts III) 4pts IV) 2pts