SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS LINÉAIRES À DEUX INCONNUES

I) INTRODUCTION

En mathématiques, on est régulièrement amené à manipuler plusieurs inconnues simultanément.

Exemple : Un cirque a des chameaux et des dromadaires. On compte 5 têtes et 8 bosses. Combien y a-t-il de chameaux ?

Rédaction :
Appelons x le nombre de chameaux ($x \in \mathbb{N}$) et y le nombre de dromadaires ($y \in \mathbb{N}$)

Il y a 5 têtes : $x + y = 5$
Il y a 8 bosses : $2x + y = 8$
On résout le système (S) : $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+y=8 \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x+x+y=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x+5=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3+y=5 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

S = {(3 ; 2)}.   Il y a donc 3 chameaux.

Remarques :

- $2x + y = 8$ est une équation dite « linéaire à deux inconnues »
  (4 ; 0) et (2 ; 4) sont 2 couples solutions de cette équation.
  (2 ; 1) n'est pas un couple solution.
- Le système ci-dessus n'a qu'un seul couple solution, mais chacune des deux équations qui le composent en a une infinité :
  Ex : $x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - x$ donc quand x « décrit » $\mathbb{R}$, tous les couples $(x ; 5 - x)$ sont solutions de l'équation $x + y = 5$.

II) SYSTÈME DE 2 ÉQUATIONS À 2 INCONNUES

Résoudre un système « 2×2 », c'est trouver tous les couples qui sont solutions simultanément des deux équations.

Ex : Résoudre (S_1) : $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$

1) Résolution par substitution :

$$(S_1) : \begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+1 \\ 3(2y+1)+6y=3 \end{cases}$$

On exprime une des inconnues en fonction de l'autre on la remplace par l'expression trouvée.

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+1 \\ 6y+3+6y=3 \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+1 \\ 12y=0 \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

S = {(1 ; 0)}

2) Résolution par combinaison linéaire :

$$(S_1) : \begin{cases} x-2y=1 & (L_1) \\ 3x+6y=3 & (L_2) \end{cases}$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ 6x=6 & 3(L_1)+(L_2) \end{cases}$$

On combine les deux équations de façon à faire disparaître une des inconnues

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

S = {(1 ; 0)}

Remarques :

● En dernière ligne, n'oubliez ni les { }, ni les ( ) :   S = {(;)}

● Vérifier le couple solution trouvé !

p206 : 110, 111, 112, 113, 114
p207 : 121, 122, 123, 124
p210 : 142, 143