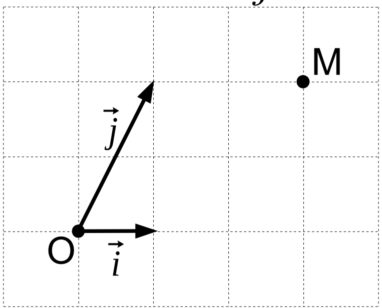
VECTEURS 2 – REPÈRES

I) *BASES ET REPÈRES DU PLAN*

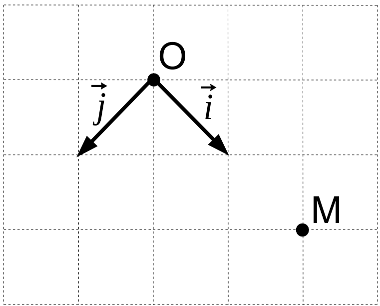
1) Intuitivement

Dans chacune des situations ci-dessous, essayer d'exprimer $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs de la figure.

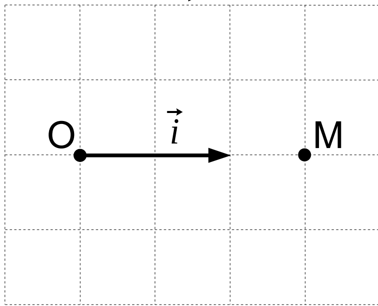
a) $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$



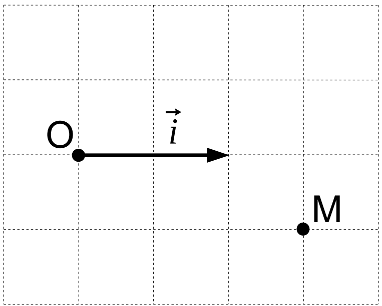
b) $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i}$



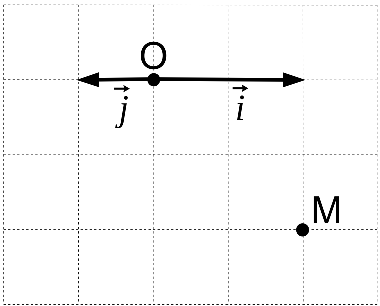
c) $\overrightarrow{OM} = 1{,}5\vec{i}$



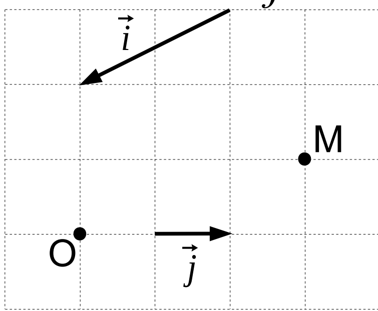
d) $\overrightarrow{OM}$ = XXX



e) $\overrightarrow{OM}$ = XXX



f) $\overrightarrow{OM} = -\vec{i} + \vec{j}$



Ces exemples permettent de sentir intuitivement que :

- En fonction d'un seul vecteur ou de deux vecteurs qui ont la même direction, on peut exprimer seulement les vecteurs qui ont la même direction.

- En fonction de deux vecteurs qui n'ont pas la même direction, on peut exprimer n'importe quel vecteur.

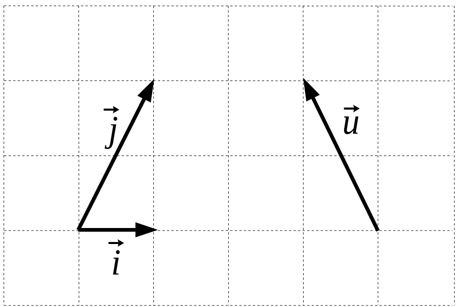
2) Coordonnées d’un vecteur dans une base

Pour pouvoir déterminer les coordonnées de n'importe quel vecteur du plan, il faut choisir au préalable un couple de vecteurs non nuls et n’ayant pas la même direction que l’on appellera « base du plan ». On peut alors décomposer tous les autres vecteurs du plan en fonction de ces deux vecteurs et cette décomposition est unique.

Définition : Dans une base $(\vec{i}\,;\vec{j}\,)$, on appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les réels x et y tels que $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$:

$$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}}$$

Ex :



$\vec{u}=-2\vec{i}+\vec{j}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

oral
p143 : 59, 60
p144 : 62

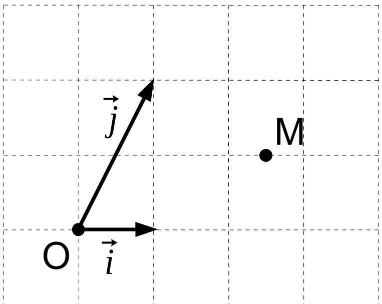
3) Coordonnées d’un point dans un repère

Pour pouvoir déterminer les coordonnées de n'importe quel point du plan, il ne suffit pas d'avoir une base, il faut aussi choisir un point fixe appelé origine. Cette base et cette origine forment un repère du plan.
Les coordonnées d'un point M dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ sont alors définies comme étant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$

Définition : Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on appelle coordonnées du point M les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$, c'est à dire les réels x et y tels que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$:

$$\boxed{M(x;y)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}}$$

Ex :



$$\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\ \text{ donc }\ \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}2\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\ \text{ donc }\ M\left(2;\frac{1}{2}\right)$$

Vocabulaire :

- Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires et de même longueur, le repère est dit orthonormé.
- Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont seulement perpendiculaires, le repère est dit orthogonal.
- Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas perpendiculaires, le repère est dit quelconque.

Feuille 8.1 : 1 à 7

p143 : 58
p144 : 64, 65, 67, 68

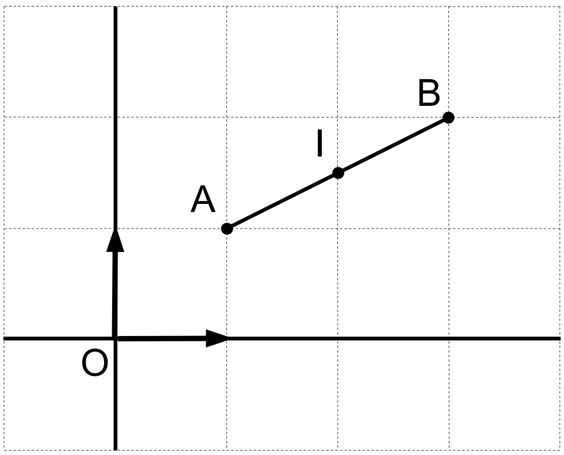
II) PROPRIÉTÉS

Soient $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs, k un réel, et A, B, I des points :

- $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{u}}=x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}}=y_{\vec{v}} \end{cases}$
- $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{w}}=x_{\vec{u}}+x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{w}}=y_{\vec{u}}+y_{\vec{v}} \end{cases}$
- $\vec{v}=k\,\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{v}}=k\,x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{v}}=k\,y_{\vec{u}} \end{cases}$
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

  donc les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont : $\begin{cases} x_{\overrightarrow{AB}}=x_B-x_A \\ y_{\overrightarrow{AB}}=y_B-y_A \end{cases}$
- I est le milieu de [AB] $\Leftrightarrow \begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$
- Si $(O;\vec{i};\vec{j})$ est orthonormé : $\|\vec{u}\|=\sqrt{x_{\vec{u}}^{\,2}+y_{\vec{u}}^{\,2}}$

  $\|\overrightarrow{AB}\|=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$



p144 : 70, 72, 73, 74, 76
p150 : 131, 132, 133, 136

p174 : 56, 57
p175 : 58, 59, 61, 63, 64, 65, 66

III) DANS LES EXERCICES

Ex 1 : Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère et deux point A(1 ; 2) et B(4 ; 1).

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2) Déterminer les coordonnées de C le symétrique de B par rapport à A.
3) Déterminer les coordonnées du point D tel que $3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

Rédaction :

1) Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

Par hypothèse, A(1 ; 2) et B(4 ; 1) donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

2) Coordonnées de C.

Par hypothèse, C est le symétrique de B par rapport à A
donc A est le milieu de [BC]

donc $\begin{cases} x_A=\dfrac{x_B+x_C}{2} \\ y_A=\dfrac{y_B+y_C}{2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} 1=\dfrac{4+x_C}{2} \\ 2=\dfrac{1+y_C}{2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_C=-2 \\ y_C=3 \end{cases}$ donc C(–2 ; 3)

3) Coordonnées de D.

Par hypothèse, $3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}=\vec{0}$ donc $\begin{cases} 3(x_D-x_A)-(x_D-x_C)=0 \\ 3(y_D-y_A)-(y_D-y_C)=0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} 3(x_D-1)-(x_D+2)=0 \\ 3(y_D-2)-(y_D-3)=0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} 2x_D-5=0 \\ 2y_D-3=0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x_D=5/2 \\ y_D=3/2 \end{cases}$ $\qquad$ $D\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Ex 2 : Soit un parallélogramme non aplati ABCD et E le point tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.

1) Justifier que $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD})$ est un repère du plan.
2) Déterminer les coordonnées des cinq points de la figure dans ce repère.
3) Montrer que C est le milieu de [AE].

Rédaction :

1) <u>Repère du plan.</u>

Par hypothèse, ABCD est un parallélogramme non aplati donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont deux vecteurs non nuls de directions différentes donc $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD})$ est bien un repère du plan.

2) <u>Coordonnées des points.</u>

A est l'origine du repère donc A(0 ; 0)

On a : $\overrightarrow{AB} = 1 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AD}$ donc B(1 ; 0)

De même : $\overrightarrow{AD} = 0 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AD}$ donc D(0 ; 1)

Par hypothèse, ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc C(1 ; 1)

Par hypothèse, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$ donc $\begin{cases} x_E - x_B = (x_D - x_A) + (x_C - x_A) \\ y_E - y_B = (y_D - y_A) + (y_C - y_A) \end{cases}$

donc $\begin{cases} x_E - 1 = (0 - 0) + (1 - 0) \\ y_E - 0 = (1 - 0) + (1 - 0) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_E = 2 \\ y_E = 2 \end{cases}$ donc E(2 ; 2)

3) <u>Montrons que C est le milieu de [AE].</u>

Les coordonnées du milieu de [AE] sont : $\begin{cases} \dfrac{x_A + x_E}{2} = \dfrac{0+2}{2} = 1 \\ \dfrac{y_A + y_E}{2} = \dfrac{0+2}{2} = 1 \end{cases}$

On reconnaît les coordonnées de C, donc C est bien le milieu de [AE].