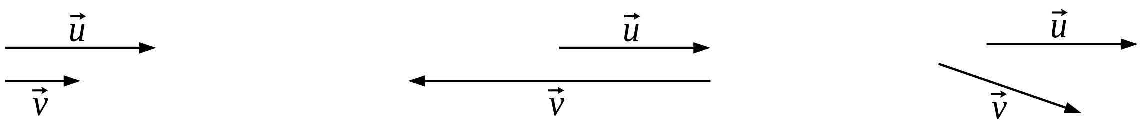
VECTEURS 3 – COLINÉARITÉ

I) COLINÉARITÉ DE DEUX VECTEURS

1) Intuitivement

Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$ dans les cas suivants :



$\vec{u} = 2\ \vec{v}$ $\qquad$ $\vec{u} = -\dfrac{1}{2}\ \vec{v}$ $\qquad$ $\vec{u} = ?\ \vec{v}$

Ces exemples permettent de sentir intuitivement que :
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même direction, un tel réel k n'existe pas.

2) Définition

On dit que $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ lorsqu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- $\vec{u}$ a alors la même direction que $\vec{v}$.
- Les coordonnées de $\vec{u}$ sont proportionnelles à celles de $\vec{v}$.

Remarques :
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{v}$:
  car quelque soit $\vec{v}$, il suffit de choisir $k = 0$: $\vec{0} = 0 \times \vec{v}$
  En revanche, aucun vecteur non nul n'est colinéaire au vecteur nul :
  $\vec{u} = ? \times \vec{0}$
- Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et où $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$:
  Le réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ est alors non-nul,
  on peut donc écrire $\vec{v} = \dfrac{1}{k}\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donc aussi colinéaire à $\vec{u}$.
  On dit alors que « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires » (l'un à l'autre)

p149 : 120, 121, 122
p154 : 163

p178 : 88

II) DANS LES EXERCICES

1) Application

A, B, C et D étant distincts, on a :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ (AB) // (CD)
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ A, B et C sont alignés

2) Exemple

Dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère les points :
A(1 ; 2), B(4 ; 1), C(6 ; –1), D(0 ; 1) et E(3 ; 4/3).
1) Montrer que (AB) et (CD) sont parallèles.
2) Les points A, B et E sont-ils alignés ?

Rédaction :

1) Montrer que : (AB) // (CD).

Par hypothèse, A(1 ; 2) et B(4 ; 1) donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

Par hypothèse, C(6 ; –1) et D(0 ; 1) donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$

On remarque que $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$
donc $\overrightarrow{CD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$
donc $\boxed{\text{(AB) // (CD)}}$.

2) A, B et E sont-ils alignés ?

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et par hypothèse, A(1 ; 2) et E(3 ; 4/3) donc $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

On remarque que $2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$

donc $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AE}$
donc $\boxed{\text{A, B et E sont bien alignés}}$.

p151 : 137, 144, 145
p152 : 150, 151
p153 : 153

III) DÉTERMINANT DE 2 VECTEURS

Parfois, il n'est pas très facile de mettre en évidence le fait que deux vecteurs sont colinéaires. On peut alors calculer leur « déterminant ».

1) Définition

On appelle « déterminant des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ » le réel noté :

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x\,y' - x'\,y$$

2) Critère de colinéarité

Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul :

$$\vec{u} \text{ est colinéaire à } \vec{v} \Leftrightarrow \det(\vec{u};\vec{v}) = 0$$

Démonstration :

Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ les coordonnées de $\vec{u}$ sont proportionnelles à celles de $\vec{v}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{array}{c|c} x & x' \\ \hline y & y' \end{array}$ est un tableau de proportionnalité

$\Leftrightarrow x\,y' = x'\,y$

$\Leftrightarrow x\,y' - x'\,y = 0$

$\Leftrightarrow \det(\vec{u};\vec{v}) = 0$

p173 : 42, 44, 48, 49
p176 : 67, 68, 69, 71, 76
p177 : 78, 79, 81, 82
p178 : 86
p179 : 91

algo
p177 : 77