2des Composition du 8 IV 15 — 3h — Corrigé succinct

I)

f est strictement croissante sur :	$[-10 ; -7]$	$[-10 ; -7] \cup [0 ; 6]$	$[1 ; 5]$
Le maximum de f sur $[-10 ; 10]$ est :	6	3	10
Cf coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées :	$(-5 ; 0)$	$(0 ; -5)$	$(4 ; 0)$
L'équation $f(x) = k$ a trois solutions distinctes si :	$k = 1$	$k = 2$	$k = 0$
L'inéquation $f(x) \leqslant 0$ a pour solutions :	$[-10 ; 0]$	$\{-10\} \cup [-5 ; 4]$	$\{-10\} \cap [-5 ; 4]$
L'équation $f(x+1) = 0$ a pour solutions :	$\{-10 ; -5 ; 4\}$	$\{-11 ; -6 ; 3\}$	$\{-9 ; -4 ; 5\}$
Si $a \in [2 ; 4]$, on a :	$f(a) > f(a-1)$	$f(a) < f(a-1)$	$f(a) \geqslant f(a-1)$
(P) : $x \in [-10 ; -7]$ et (Q) : $f(x) \in [0 ; 2]$	(P) $\Rightarrow$ (Q)	(Q) $\Rightarrow$ (P)	(P) $\Leftrightarrow$ (Q)

II) 1) Solution sur $[-3 ; -1]$?

Sur $[-3 ; -1]$, Cf coupe l'axe des abscisses en un point donc (E) admet une solution unique sur cet intervalle.

2) Encadrement de $f(x)$

Par (H), f est strictement croissante sur $[-3 ; -1]$
donc pour tout x tel que $-3 \leqslant x \leqslant -1$ on a $f(-3) \leqslant f(x) \leqslant f(-1)$
donc $\boxed{-42 \leqslant f(x) \leqslant 4}$

3) Test de l'algorithme avec $A = -3$; $B = -1$; $N = 5$

Les valeurs des variables à la fin de la boucle "pour" sont :

I	1	2	3	4	5
M	-2	-1,5	-1,25	-1,375	-1,4375
F	-42	-10	-1,125	-1,125	-1,125
K	-10	-1,125	1,859...	0,4785...	-0,2947...
A	-2	-1,5	-1,5	-1,5	-1,4375
B	-1	-1	-1,25	-1,375	-1,375

On voit qu'à chaque itération A et B encadrent la solution de plus en plus finement.

4) Et si on augmente N ?

Cet algorithme permet donc de déterminer la solution de (E) sur $[-3 ; -1]$ de façon approchée. Plus N est grand, plus l'algorithme est précis.

III) Partie A

1) Vérification d'égalité

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $2(x-1)^2+2 = 2(x^2-2x+1)+2$
$= 2x^2-4x+4$
$= f(x)$

2) Signe de f

D'après 1), pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 2(x-1)^2+2$
or un carré est toujours positif ou nul donc $(x-1)^2 \geqslant 0$
donc $2(x-1)^2+2 > 0$ donc $f(x) > 0$
Bilan : $\boxed{f \text{ est donc strictement positive sur } \mathbb{R}}$

3) Minimum de f

Montrons que f admet un minimum en $x = 1$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) - f(1) = 2x^2-4x+4 - (2\times1^2-4\times1+4)$
$= 2x^2-4x+4-2$
$= 2x^2-4x+2$
$= 2(x^2-2x+1)$
$= 2(x-1)^2$
or un carré est toujours positif ou nul donc $2(x-1)^2 \geqslant 0$
donc $f(x) - f(1) \geqslant 0$
donc $f(x) \geqslant f(1)$ avec $f(1) = 2$
donc f admet un minimum de 2 en $x = 1$ sur $\mathbb{R}$.

4) Variations de f sur $]-\infty ; 1]$

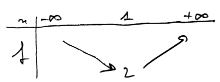
Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 \leqslant 1$
déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$:
$f(x_1) - f(x_2) = 2x_1^2 - 4x_1 + 4 - 2x_2^2 + 4x_2 - 4$
$= 2(x_1^2 - x_2^2) - 4(x_1 - x_2)$
$= 2[(x_1^2 - x_2^2) - 2(x_1 - x_2)]$
$= 2[(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 2(x_1 - x_2)]$
$= 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2)$

Par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$
$x_1 < 1$ et $x_2 \leqslant 1$ donc $x_1 + x_2 < 2$ donc $x_1 + x_2 - 2 < 0$
Bilan, $f(x_1) - f(x_2) > 0$ donc $f(x_1) > f(x_2)$
donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty ; 1]}$

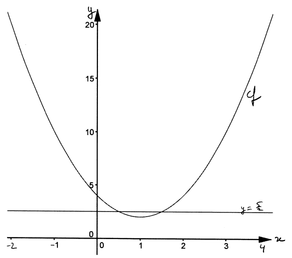
Variation sur $[1 ; +\infty[$

Pour tous x_1, x_2 tels que $1 \leqslant x_1 < x_2$
déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$:
$f(x_1) - f(x_2) = 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2)$
Par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$
$x \geqslant 1$ et $x_2 > 1$ donc $x_1 + x_2 > 2$ donc $x_1 + x_2 - 2 > 0$
Bilan, $f(x_1) - f(x_2) < 0$ donc $f(x_1) < f(x_2)$
donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [1 ; +\infty[}$

Tableau de variation



5) Courbe



6) Résolution graphique de (I) : $f(x) \leqslant \frac{5}{2}$

Les solutions sont les abscisses des points de Cf situés en dessous de la droite d'équation $y = \frac{5}{2}$ (intersection comprises).
$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right]}$

Résolution par le calcul de (I)

(I) : $f(x) \leqslant \frac{5}{2}$ (pas de valeurs interdites)
(I) $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 4 \leqslant \frac{5}{2}$
(I) $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + \frac{8}{2} - \frac{5}{2} \leqslant 0$
(I) $\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + \frac{3}{2} \leqslant 0$
(I) $\Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{3}{4} \leqslant 0$
(I) $\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + \frac{3}{4} \leqslant 0$
(I) $\Leftrightarrow (x-1)^2 - \frac{1}{4} \leqslant 0$
(I) $\Leftrightarrow \left(x - 1 - \frac{1}{2}\right)\left(x - 1 + \frac{1}{2}\right) \leqslant 0$
(I) $\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \leqslant 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x - \frac{3}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x - \frac{1}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right]}$

Partie B

7) Les valeurs que x peut prendre

x est une masse donc $x > 0$
la pierre initiale pesait 2g donc $x < 2$
Bilan $\boxed{x \in]0 ; 2[}$ (g)

La masse de l'autre morceau est $\boxed{2 - x}$

8) Valeur initiale de la pierre

Au début, la pierre pèse 2g donc sa valeur est 2^2 c'est à dire $\boxed{4\text{ €}}$

9) Valeur totale des deux morceaux

Après la chute, il y a 2 morceaux qui pèsent respectivement x et $2 - x$.
La somme de leurs valeurs en euro est donc :
$x^2 + (2-x)^2 = x^2 + 4 - 4x + x^2 = 2x^2 - 4x + 4 = \boxed{f(x)}$

10) Encadrement de $f(x)$

D'après 4) il y a 2 cas :

- Si $0 < x \leqslant 1$ alors, f est strictement décroissante,
  donc $f(0) > f(x) \geqslant f(1)$
  donc $4 > f(x) \geqslant 2$
- Si $1 \leqslant x < 2$ alors, f est strictement croissante,
  donc $f(1) \leqslant f(x) < f(2)$
  donc $2 \leqslant f(x) < 4$

Bilan, si $x \in]0 ; 2[$ alors $\boxed{2 \leqslant f(x) < 4}$

11) Si l'un des deux morceaux pèse entre 0,5g et 1,5g alors la valeur totale des deux morceaux est inférieure ou égale à 2,5 €

Partie C

12) Valeur de la pierre

Avant de tomber, la pierre pèse a grammes et vaut a^2 euros.
Après la chute il y a deux morceaux qui pèsent x et $a - x$ grammes
la valeur de ces deux morceaux est donc $x^2 + (a-x)^2$ euros.

13) Inégalité

Pour tout x de $]0 ; a[$ étudions le signe de $x^2 + (a-x)^2 - a^2$:
$x^2 + (a-x)^2 - a^2 = x^2 + \cancel{a^2} - 2ax + x^2 - \cancel{a^2}$
$= 2x^2 - 2ax$
$= 2x(x-a)$

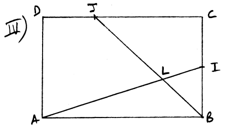
or par (H) $\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x < a \text{ donc } x - a < 0 \end{array}\right\}$ donc $2x(x-a) < 0$

Bilan : $x^2 + (a-x)^2 - a^2 < 0$
donc $\boxed{x^2 + (a-x)^2 < a^2}$

14) Conclusion

Si x est la masse en g d'un des deux morceaux d'une pierre chère de masse initiale a alors :
D'après 7) $x \in]0 ; a[$
D'après 12) la valeur des 2 morceaux est $x^2 + (a-x)^2$
la valeur initiale de la pierre est a^2
D'après 13) $x^2 + (a-x)^2 < a^2$
Bilan : la valeur des 2 morceaux est toujours plus faible que la valeur initiale de la pierre.
$\boxed{\text{Une pierre chère qui se casse en 2 perd toujours de la valeur}}$

IV)



1) Choix du repère

Par (H) ABCD est un rectangle non aplati donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires donc $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ forme un repère.

2) Coordonnées de A, B, C et D

A est l'origine du repère donc $\boxed{A(0 ; 0)}$
$\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD}$ donc $\boxed{B(1 ; 0)}$
$\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}$ donc $\boxed{D(0 ; 1)}$
ABCD est un rectangle donc $\overrightarrow{AC} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}$ donc $\boxed{C(1 ; 1)}$

3) Coordonnées de I

Par (H) I est le milieu de [BC] donc $\begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\boxed{I\left(1 ; \frac{1}{2}\right)}$

Coordonnées de J

Par (H) $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ donc $\begin{cases} x_J - x_D = \frac{1}{3}(x_C - x_D) \\ y_J - y_D = \frac{1}{3}(y_C - y_D) \end{cases}$
donc $\begin{cases} x_J = \frac{1}{3} \times 1 \\ y_J - 1 = \frac{1}{3} \times 0 \end{cases}$
donc $\begin{cases} x_J = \frac{1}{3} \\ y_J = 1 \end{cases}$ $\boxed{J\left(\frac{1}{3} ; 1\right)}$

4) a) Existence de k

Par (H) $L \in (AI)$ donc $\overrightarrow{AL}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AI}$
donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AL} = k\overrightarrow{AI}$

b) Coordonnées de L en fonction de k

D'après a) $\overrightarrow{AL} = k\overrightarrow{AI}$ donc $\begin{cases} x_L - x_A = k(x_I - x_A) \\ y_L - y_A = k(y_I - y_A) \end{cases}$
donc $\begin{cases} x_L = k \\ y_L = \frac{k}{2} \end{cases}$ $\boxed{L\left(k ; \frac{k}{2}\right)}$

5) Colinéarité de $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BJ}$ et calcul de k

Par (H) $L \in (BJ)$ donc $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix} k-1 \\ \frac{k}{2} \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$
donc $\frac{k-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{k}{2}}{1}$
donc $k - 1 = -\frac{k}{3}$
donc $\frac{4}{3}k = 1$
donc $\boxed{k = \frac{3}{4}}$

6) Coordonnées de L

D'après 4)b) $L\left(k ; \frac{k}{2}\right)$ et d'après 5) $k = \frac{3}{4}$ donc $\boxed{L\left(\frac{3}{4} ; \frac{3}{8}\right)}$

2^c Composition du 19 I 11 2^h Corrigé succinct

I)

1) Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$

$\begin{cases} x_B - x_A = 5+3 = 8 \\ y_B - y_A = -1-3 = -4 \end{cases}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}}$

$\begin{cases} x_C - x_D = 7-3 = 4 \\ y_C - y_D = a-4 \end{cases}$ donc $\boxed{\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\a-4\end{pmatrix}}$

2) Trapèze ABCD

ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD] $\Leftrightarrow (AB)\,/\!/\,(CD)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow 8(a-4) - (-4)\times 4 = 0$

$\Leftrightarrow \dots$

$\Leftrightarrow \boxed{a = 2}$

II)

P	Q	Réponse
$\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$	A, B et C sont alignés	$P \Rightarrow Q$
$AB = 2AC$	$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$	$Q \Rightarrow P$
C est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$	$ABCD$ est un parallélogramme	$P \Leftrightarrow Q$
Il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$	(AB) et (CD) sont parallèles	$P \Leftrightarrow Q$

III)

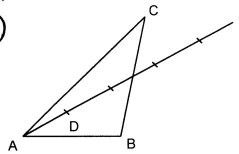
1) Construire D tel que $3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

(1) $\Leftrightarrow 5\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

(1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

D est donc l'image de A par la translation de vecteur $\frac{1}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$



2) Existence de E tel que $2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} - 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ (2)

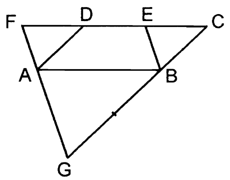
(2) $\Leftrightarrow \cancel{2\overrightarrow{EA}} + \cancel{\overrightarrow{EA}} + \overrightarrow{AB} - 3\cancel{\overrightarrow{EA}} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

(2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$

impossible car par (H) $AB \neq 3AC$

donc $\boxed{\text{E n'existe pas}}$

IV)



1) Coordonnées des points

Par (H) A est l'origine du repère donc $\boxed{A(0;0)}$

$\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD}$ donc $\boxed{B(1;0)}$

$\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}$ donc $\boxed{D(0;1)}$

Par (H) ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc $\boxed{C(1;1)}$

Par (H) E est le milieu de [DC] donc $\begin{cases} x_E = \frac{x_D + x_C}{2} = \frac{1}{2} \\ y_E = \frac{y_D + y_C}{2} = 1 \end{cases}$ donc $\boxed{E(\frac{1}{2};1)}$

Par (H) F est le symétrique de E par rapport à D donc $\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{DE}$ donc $\begin{cases} x_F - x_D = -(x_E - x_D) \\ y_F - y_D = -(y_E - y_D) \end{cases}$ donc ... $\begin{cases} x_F = -\frac{1}{2} \\ y_F = 1 \end{cases}$ donc $\boxed{F(-\frac{1}{2};1)}$

Par (H) $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{CB}$ donc $\begin{cases} x_G - x_B = 2(x_B - x_C) \\ y_G - y_B = 2(y_B - y_C) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_G = 2(1-1)+1 \\ y_G = 2(0-1)+0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = -2 \end{cases}$ donc $\boxed{G(1;-2)}$

2) Montrer que : $A \in (FG)$

$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-3\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$x_{\overrightarrow{AF}}\, y_{\overrightarrow{FG}} - x_{\overrightarrow{FG}}\, y_{\overrightarrow{AF}} = (-\frac{1}{2})(-3) - \frac{3}{2}\times 1 = 0$

donc $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires donc $\boxed{A \in (FG)}$

3) Montrer que : $(FG)\,/\!/\,(BE)$

$\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$x_{\overrightarrow{FG}}\, y_{\overrightarrow{BE}} - x_{\overrightarrow{BE}}\, y_{\overrightarrow{FG}} = \frac{3}{2}\times 1 - (-\frac{1}{2})(-3) = 0$

donc $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires donc : $\boxed{(FG)\,/\!/\,(BE)}$

V)

1) Factoriser $A(x)$

Pour tout réel x,

$A(x) = x^2 - 13x + 40$

$A(x) = (x - \frac{13}{2})^2 - \frac{13^2}{4} + \frac{160}{4}$

$A(x) = (x - \frac{13}{2})^2 - \frac{9}{4}$

$A(x) = (x - \frac{13}{2} - \frac{3}{2})(x - \frac{13}{2} + \frac{3}{2})$

$\boxed{A(x) = (x-8)(x-5)}$

2) Résoudre (I)

(I) : $\frac{-1}{3(x-5)} + \frac{2}{x-8} < \frac{1}{A(x)}$

Conditions : $\begin{cases} x-5 \neq 0 \\ x-8 \neq 0 \\ A(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq 8 \end{cases}$

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(x-8)}{3(x-8)(x-5)} + \frac{6(x-5)}{3(x-8)(x-5)} + \frac{-3}{3(x-8)(x-5)} < 0 \\ x \neq 5 \text{ et } x \neq 8 \end{cases}$

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x+8+6x-30-3}{3(x-8)(x-5)} < 0 \\ x \neq 5 \text{ et } x \neq 8 \end{cases}$

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x-25}{3(x-8)(x-5)} < 0 \\ x \neq 5 \text{ et } x \neq 8 \end{cases}$

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5(x-5)}{3(x-8)(x-5)} < 0 \\ x \neq 5 \text{ et } x \neq 8 \end{cases}$

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-8} < 0 \\ x \neq 5 \text{ et } x \neq 8 \end{cases}$

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-8 < 0 \\ x \neq 5 \text{ et } x \neq 8 \end{cases}$

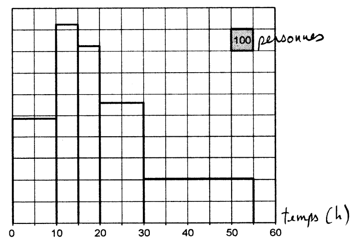
$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty;5[\,\cup\,]5;8[}$

VI)

1) Histogramme

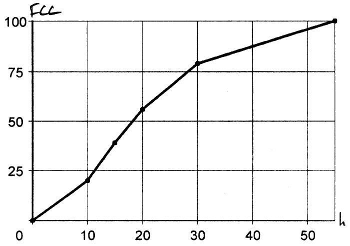
les amplitudes des classes ne sont pas constantes

classe	[0;10[	[10;15[	[15;20[	[20;30[	[30;55[
effectif	972	924	824	1120	1020
largeur (carreaux)	2	1	1	2	5
aire "	9,72	9,24	8,24	11,20	10,20
hauteur "	4,86	9,24	8,24	5,6	2,04



2) Polygone des FCC

Nombre d'heures hebdomadaire	[0 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 55[
Effectif	972	924	824	1120	1020
Fréquence (%)	20	19	17	23	21
Fréquence cumulée (%)	20	39	56	79	100



le point de la courbe d'ordonnée 25 a pour abscisse environ 11,3 donc $Q_1 \approx 11^h$

le point de la courbe d'ordonnée 50 a pour abscisse environ 18 donc Med $\approx 18^h$

le point de la courbe d'ordonnée 75 a pour abscisse environ 28,2 donc $Q_3 \approx 28^h$

3) Temps moyen

Remplaçons chaque classe par son milieu : $\bar{x} \approx \frac{5\times 972 + 12,5\times 924 + \dots + 42,5\times 1020}{4860} \approx \boxed{21^h}$

On remarque que $\bar{x}$ est sensiblement supérieur à Med donc la série est "plus étalée à droite" (les français qui regardent le plus la télévision, la regardent beaucoup plus !)

4) Niveau maximum

Appelons x le niveau centre de la dernière classe, on a : $\frac{5\times 972 + 12,5\times 924 + \dots + x\times 1020}{4860} = 20,5$

donc $\frac{58830 + x\times 1020}{4860} = 20,5$ donc $x \times 1020 = 4860\times 20,5 - 58830$ donc $x = \frac{40800}{1020} = 40$

Appelons max le maximum cherché, on a : $\frac{30 + \max}{2} = 40$ donc $\max = 40\times 2 - 30 = \boxed{50^h}$