2^{des} **Composition de mathématiques 3h calculatrice autorisée** 8IV15

Nom :

I) Soit f une fonction définie sur [–10 ; 10] telle que $f(-5)=f(4)=0$ et dont le tableau de variations est ci-dessous :

x	–10		–7		0		6		10
var f	0	↗	2	↘	–5	↗	3	↘	2

Pour chacune des questions ci-dessous, entourez lisiblement la ou les bonne(s) réponse(s) :

Question	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
f est strictement croissante sur :	[–10 ; –7]	[–10 ; –7] ∪ [0 ; 6]	[1 ; 5]
Le maximum de f sur [–10 ; 10] est :	6	3	10
Cf coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées :	(–5 ; 0)	(0 ; –5)	(4 ; 0)
L'équation $f(x) = k$ a trois solutions distinctes si :	$k = 1$	$k = 2$	$k = 0$
L'inéquation $f(x) \leqslant 0$ a pour solutions :	[–10 ; 0]	{–10} ∪ [–5 ; 4]	{–10} ∩ [–5 ; 4]
L'équation $f(x + 1) = 0$ a pour solutions :	{–10 ; –5 ; 4}	{–11 ; –6 ; 3}	{–9 ; –4 ; 5}
Si $a \in [2 ; 4]$, on a :	$f(a) > f(a-1)$	$f(a) < f(a-1)$	$f(a) \geqslant f(a-1)$
(P) : $x \in [-10 ; -7]$ et (Q) : $f(x) \in [0 ; 2]$	(P) ⇒ (Q)	(Q) ⇒ (P)	(P) ⇔ (Q)

II) Soit f la fonction définie sur ℝ par : $x \mapsto x^3-3x^2-2x+6$. On exécute alors l'algorithme ci-dessous :

```
Saisir un entier naturel N
Saisir deux réels A et B tels que A < B < 0
Pour I allant de 1 à N :
    (A+B)/2 → M
    A³–3A²–2A+6 → F
    M³–3M²–2M+6 → K
    Si F×K < 0
        M → B
    Sinon
        M → A
    Fin du Si
Fin du Pour
Afficher A et B
```

1) Soit (E) l'équation : $f(x) = 0$.
En traçant Cf avec une calculatrice, peut-on voir si (E) admet une solution comprise entre –3 et –1 ?
2) On admet que f est strictement croissante sur [–3 ; –1]. En déduire un encadrement de $f(x)$ sur cet intervalle.
3) Tester l'algorithme en prenant :
A = –3 ; B = –1 et N = 5.
On résumera chacune des étapes dans un tableau avec une ligne par variable.
Que renvoie cet algorithme et quel est le lien entre ces valeurs et la question 1 ?
4) Que se passe-t-il si on augmente la valeur de N ?

III) Partie A : Étude de fonction.

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $x \mapsto 2x^2-4x+4$

1) Montrer que pour tout x de ℝ, $f(x)=2(x-1)^2+2$
2) Étudier le signe de f sur ℝ.
3) Montrer que f admet un minimum que l'on précisera.
4) Étudier les variations de f sur ℝ et conclure par un tableau de variations.
5) Tracer la représentation graphique de f appelée Cf dans un repère orthogonal.
(échelle : 2 cm en abscisses ; 0,5 cm en ordonnées)
6) Résoudre graphiquement puis algébriquement l'inéquation : $f(x) \leqslant \frac{5}{2}$

Partie B : Cas d'une pierre « okaré » de 2 grammes.

Les pierres « okaré » sont des pierres précieuses dont la valeur en euros est égale au carré de leur masse en grammes. On a malencontreusement laissé choir une pierre « okaré » de 2 grammes qui s'est alors brisée en deux morceaux. Soit x la masse en grammes de l'un des deux morceaux.

7) Quelles sont les valeurs en grammes que x peut prendre dans cette partie ?
Quelle est la masse de l'autre morceau ?
8) Quelle était, en euros, la valeur initiale de la pierre avant de tomber ?
9) Montrer que la valeur totale en euros des deux morceaux est égale à $f(x)$ (cf partie A).
10) Justifier à partir des variations de f que cette valeur totale est comprise entre 2 et 4 euros.
11) Exprimer le résultat de la question 6 dans le contexte d'une pierre « okaré » (une phrase suffira).

Partie C : Cas d'une pierre « okaré » de masse quelconque.

Dans cette partie, la pierre « okaré » qui s'est cassée en deux morceaux a une masse quelconque que l'on appellera a en grammes. x est toujours la masse en grammes de l'un des deux morceaux.

12) Exprimer les valeurs en euro de la pierre **avant ET après** être tombée en fonction de x et de a.
13) Montrer que pour tout x de]0 ; a[on a : $x^2+(a-x)^2<a^2$.
14) Que peut-on en déduire concernant la valeur d'une pierre « okaré » de masse quelconque quand elle se casse en deux morceaux ?

IV) Soit ABCD un rectangle tel que AB = 6 et BC = 4.

On appelle I le milieu de [BC], J le point tel que $\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et L l'intersection de (AI) et (BJ).

1) Justifier que le triplet $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$ forme un repère.
2) Déterminer les coordonnées de A, B, C et D dans ce repère (justifier succinctement).
3) Calculer les coordonnées de I et J dans ce repère.
4) a) Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AL}=k\overrightarrow{AI}$.
b) Déterminer les coordonnées de L en fonction de k.
5) Justifier que le vecteur $\overrightarrow{BL}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BJ}$ et en déduire la valeur de k.
6) Déterminer les coordonnées de L dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$.

Barème probable : I) 2pts II) 4pts III) 9,5pts IV) 4,5pts

NOM :
Classe :

I) Soient les points $A(-3\ ;3)$; $B(5\ ;-1)$; $C(7\ ;a)$ et $D(3\ ;4)$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, où a est un nombre réel.

1) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{DC}$.
2) Pour quelle(s) valeur(s) de a, le quadrilatère $ABCD$ est-il un trapèze de bases [AB] et [CD] ?

II) Soient quatre points A, B, C et D distincts deux à deux. Pour chacune des lignes ci-dessous, compléter la colonne « Réponse » avec l'un des choix suivants : « P ⇔ Q », « P ⇒ Q » ou « Q ⇒ P ».

P	Q	Réponse
$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$	A, B et C sont alignés	
$AB=2AC$	$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$	
C est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$	$ABCD$ est un parallélogramme	
Il existe un réel k tel que : $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$	(AB) et (CD) sont parallèles	

III) Soit un triangle ABC tel que : AB = 4cm, BC = 5cm, et AC = 7cm.

1) Construire le point D vérifiant l'égalité : $3\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$
2) Montrer qu'il n'existe pas de point E vérifiant l'égalité : $2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}-3\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

IV) Soit $ABCD$ un parallélogramme. E est le milieu du segment [CD], F est le symétrique de E par rapport à D, et G est le point défini par $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{CB}$. On considère le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$

1) Donner en justifiant les coordonnées de tous les points de la figure.
2) Montrer que A est sur la droite (FG).
3) Montrer que les droites (FG) et (BE) sont parallèles.

V) 1) Factoriser pour tout réel x : $A(x)=x^2-13x+40$

2) Résoudre dans ℝ l'inéquation : $(I):\dfrac{-1}{3(x-5)}+\dfrac{2}{x-8}<\dfrac{1}{x^2-13x+40}$

VI) On veut savoir combien d'heures par semaine les français regardent la télévision. On a interrogé pour cela un échantillon représentatif de 4860 français de tous âges et voici le résultat de l'enquête.

Nombre d'heures hebdomadaire	[0 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 55[
Effectif	972	924	824	1120	1020
Fréquence (%)					
Fréquence cumulée (%)					

1) Faire un histogramme.
2) Compléter le tableau ci-dessus (arrondir à l'unité) puis tracer le polygone des **<u>fréquences</u>** cumulées croissantes et en déduire graphiquement une approximation du temps médian et des 1er et 3ème quartiles.
3) Calculer une approximation du temps moyen (arrondir à l'unité). Comment expliquer l'écart entre le temps moyen et le temps médian trouvé dans la question précédente ?
4) Finalement, la personne qui a fait le tableau ci-dessus se rend compte qu'elle a fait une erreur : le maximum n'est pas de 55 heures hebdomadaire mais est un peu inférieur. Quel est ce nouveau maximum, sachant qu'en recalculant la moyenne cette personne trouve 20h30 ?

BAREME PROBABLE : I) 2 pts II) 1 pt III) 2,5 pts IV) 4,5 pts V) 3 pts VI) 7 pts