Ex 1 - ABCD est un parallélogramme.

E est le point de [CD] tel que $EC=\frac{1}{2}ED$

et F le point de la demi-droite [BC) tel que $CF=\frac{1}{2}CB$.

On cherche à montrer que A, E et F sont alignés de 3 façons différentes.

1) Avec la géométrie plane :
Soit G le point d'intersection de (AE) et (BC).
   a) Montrer que $CG=\frac{1}{2}CB$.
   b) En déduire que G et F sont confondus et conclure.
2) Avec la géométrie vectorielle :
   a) Justifier que $\overrightarrow{EC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
   b) A l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ puis conclure.
3) Avec la géométrie analytique :
   a) Justifier que (C ; $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CD}$) est un repère du plan.
   b) Justifier les coordonnées des points A, E et F dans ce repère.
   c) Conclure.

Ex 2 - Construire un carré ABCD, puis à l'intérieur de ce carré le triangle équilatéral ABE et à l'extérieur du carré le triangle équilatéral ADF.
Il semble que les points C, E et F sont alignés. Nous allons démontrer cette conjecture de 2 façons différentes.

1) Avec des angles :
   a) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AEB}$.
   b) Quelle est la nature du triangle CBE ? En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BEC}$.
   c) Quelle est la nature du triangle FAE ? En déduire la mesure de l'angle $\widehat{FEA}$.
   d) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{FEC}$ et conclure.
2) Avec des coordonnées :
   a) On considère le repère orthonormal (A ; $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AD}$)
   b) Déterminer sans justifier les coordonnées de C, E et F
   c) Les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont-ils colinéaires ? Conclure.

Ex 3 - ABC est un triangle quelconque et les points E et F sont définis par : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AB}$.

On veut montrer que les points C, E et F sont alignés.

1) Méthode géométrique : Exprimer $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis conclure.
2) Méthode analytique : Dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AC}$), justifier les coordonnées des points C, E et F puis montrer que les points C, E et F sont alignés

Ex 4 - Une feuille métallique rectangulaire ABCD est protégée par une plaque également rectangulaire MNPQ en plastique opaque.
Les deux rectangles ont le même centre appelé O et la plaque MNPQ « déborde » de 1 cm sur chaque bord de la feuille ABCD.
On note H le milieu de [BC] et K le milieu de [PN].
On voudrait couper la feuille ABCD suivant la diagonale [BD]. Comme cette diagonale est invisible, on se demande si cela revient au même de couper la plaque MNPQ suivant sa diagonale [NQ].

1) Justifier en une phrase que le problème revient à montrer que les points O, B et N sont alignés.
2) Méthode avec la colinéarité :
On considère le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{i}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$ et $\vec{j}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DA}$.
Déterminer les coordonnées des points B et N dans ce repère puis répondre à la question posée.
3) Méthode avec des distances :
Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ ci-dessus, calculer les distances OB, ON et BN puis conclure.
4) Méthode avec des angles :
Déterminer les angles $\widehat{HOB}$ et $\widehat{KON}$. Justifier rapidement que O, H et K sont alignés et conclure.
5) Méthode avec des aires :
Calculer l'aire des triangles OHB et OKN et du trapèze HBNK. Si les points O, B et N étaient alignés, quelle relation aurait-on entre ces trois aires ? Conclure

Ex 5 - ABCD est un parallélogramme de centre O.

I est le milieu de [AB] et E est le point tel que $\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$.

Il s'agit de démontrer que les points A, E et C sont alignés par différentes méthodes.

1) Utilisation d'une configuration :
   a) Que représente E pour le triangle ABD ?
   b) Prouver que A, E et O sont alignés.
   c) En déduire l'alignement de A, E et C.
2) Utilisation du calcul vectoriel :
   a) Exprimez $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   b) En déduire l'alignement de A, E et C.
3) Utilisation du repère (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$)
   a) Justifier les coordonnées de A, B, C, D, I et E.
   b) Montrer que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
   c) En déduire l'alignement de A, E et C.

Ex 6 - Soit un parallélogramme ABCD. On désigne par O le centre du parallélogramme, E le symétrique de A par rapport à B, F le symétrique de B par rapport à C, G le symétrique de C par rapport à D, H le symétrique de D par rapport à A. Il semble que le quadrilatère EFGH soit un parallélogramme. Montrons le en utilisant trois méthodes :

1) Avec le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AD}$) :
   a) Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.
   b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GF}$, puis conclure.
2) Avec Chasles :
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GF}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ puis conclure.
3) Avec une symétrie :
   a) Montrer que AECG est un parallélogramme, puis en déduire le symétrique de E par rapport à O.
   b) Déterminer de même en deux ou trois lignes, le symétrique de F.
   c) Conclure.